MODELO DE 3 GRAUS DE LIBERDADE PARA AVALIAÇÃO DE DIRIGIBILIDADE DE VEÍCULOS AUTOMOTORES

Pedro Armando Kastrup¹; Fernando Malvezzi²

¹ Aluno de Iniciação Científica da Escola de Engenharia Mauá (EEM/CEUN-IMT); ² Professor da Escola de Engenharia Mauá (EEM/CEUN-IMT).

Resumo. A imprevisibilidade humana dos condutores somada à imprevisibilidade dos terrenos e do clima pode ser levar a situações que podem dificultar o controle do veículo pelo condutor. E a habilidade e os tempos de reação humana não são capazes de evitar todos os riscos do trânsito. Sistemas de controle ativos operando em frequências bem maiores que a humana são uma solução eficaz para uma boa diminuição dos riscos e melhorar a segurança e o conforto nas vias públicas. Modelos matemáticos que representem a dinâmica do veículo têm sido empregados tanto para a análise do desempenho desses sistemas como para o entendimento da dinâmica veicular. Neste contexto, esta pesquisa teve como objetivo empregar modelos matemáticos da dinâmica veicular e analisar a aplicabilidade de um modelo não-linear de pneus para avaliar a dirigibilidade de um veículo. Os resultados obtidos mostraram que o modelo de três graus de liberdade apresentado neste trabalho é adequado para simular o comportamento do veículo em manobras em regime transiente, com potencial para ser empregado em sistemas de controle de veículos que possam contribuir para a estabilidade e segurança.

Introdução

Sistemas ativos de controle estão cada vez mais presentes na indústria automotiva. O avanço trazido em relação à dirigibilidade e ao comportamento mais previsível do veículo está diretamente ligado a um trânsito mais seguro. Controles para melhorar a estabilidade do veículo são capazes de operar a uma frequência muito maior do que os comandos do condutor e contribuem para prevenir eventuais situações de descontrole, como por exemplo, sobre-esterçamento em condições de baixa aderência ou em manobras que necessitam de resposta rápida, como uma brusca troca de faixa evitando um obstáculo.

Sistemas como *ABS (anti-lock braking system)*, *Torque Vectoring* e *ESP (electronic stability program)* atuam baseados nas capacidades de geração de forças longitudinais de cada uma das rodas e estão cada vez mais presentes nos novos lançamentos da indústria. Tais sistemas possuem várias características em comum – dentre elas, a necessidade de um modelo matemático de dinâmica veicular para sua operação. E quanto maior a exatidão e a abrangência desses modelos, mais confiáveis os sistemas se tornam e, portanto, os veículos mais seguros.

Recentemente, desenvolvimentos vêm guiando para que controles ativos atuem também nas capacidades de geração de forças laterais de cada roda, com sistemas de controle ativo de esterçamento e do ângulo de cambagem das rodas (Ataei *et al.*, 2020, Malvezzi *et al.*, 2022, 2015, 2014). Ataei *et al.* (2019) propuseram um controlador de cambagem capaz de, por meio da variação ativa do ângulo de cambagem, alterar a geração de força lateral nos pneus do carro, proporcionando a cambagem ideal para cada condição de operação do veículo, além de minimizar o desgaste desigual das bandas de rodagem. O controlador proposto aplicou o modelo de controle preditivo (MPC – Model Predictive Control), empregando um modelo de dinâmica veicular que considera as quatro rodas e 3 graus de liberdade-GdL (rolagem da

carroceria, guinada e aceleração lateral). O modelo matemático para o pneu empregou a *Magic Formula* (Pacejka, 2002), no qual o efeito quantitativo da cambagem é levado em consideração na modelagem do comportamento lateral. E as simulações realizadas com e sem o controlador de cambagem provaram que o controle ativo é capaz de realmente aumentar as capacidades de geração de forças laterais do veículo, tornando-o mais estável e seguro.

Contudo, a força lateral gerada com 1° de ângulo de deriva é muito maior do que a força lateral proporcionada por 1° de ângulo de cambagem (Gillespie, 2021). E assim, o estudo acerca de um modelo com controle ativo de esterçamento se torna relevante, sendo uma alternativa para melhorar as características de estabilidade e segurança de um veículo, também controlando a velocidade de guinada e o ângulo de deriva do veículo.

No entanto, por mais que estejam em difusão no mundo acadêmico, diversos modelos matemáticos que alimentam esses sistemas de controle ainda são bastante simplificados e linearizados e, portanto, não representam fielmente o real comportamento de um veículo – algo que deve ser imprescindível, principalmente quando se trata de um tema diretamente ligado à segurança.

Hirschfeld (2020) empregou um modelo de dinâmica veicular para verificar quais parâmetros e graus de liberdade realmente são relevantes para que o modelo se tornasse fidedigno à realidade, e ao mesmo tempo, proporcionasse rápida resposta e baixo esforço computacional, para que este, futuramente, pudesse integrar o desenvolvimento de um modelo de controle ativo de estabilidade. A provocação inicial foi a tentativa de criar um modelo que ao houvesse correlação com os *outputs* do CarSim – um programa comercial já extremamente consolidado e validado pela indústria automotiva, mas o qual não disponibiliza as equações diferenciais não lineares do seu modelo multicorpos de 16 GdL.

Esse modelo considerou veículo com 2 GdL (aceleração lateral e guinada) e um modelo linear simplificado de pneu, e foi implementado no programa MATLAB. Os resultados obtidos a partir desse modelo de 2 GdL foram comparados com aqueles gerados pelo programa CarSim, e concluiu-se que para baixas acelerações laterais (em torno de 0,35g), o modelo linear permitia avaliar a dirigibilidade do veículo de maneira bem próxima ao programa comercial. No entanto, para acelerações laterais acima de 0,5g, a aderência entre os resultados dos modelos diminui consideravelmente. Como explicação para tal comportamento, Hirschfeld sugeriu que trabalhos futuros deveriam avaliar os benefícios de se incluir a rolagem da carroceria como um grau de liberdade adicional ao modelo, assim se tratando de um modelo de quatro rodas e que também considere a transferência lateral de carga e seus efeitos sobre modelos de pneu não lineares.

Neste sentido, este trabalho tem como objetivo estender o modelo matemático de dois graus de liberdade 2 GdLda dinâmica veicular empregado na simulação da dirigibilidade de veículos. Esta extensão visa obter um modelo de 3 GdL que leve em conta o comportamento não linear dos pneus em relação à geração da força lateral. As forças no contato entre o pneu e o pavimento foram calculadas usando a fórmula de Pacejka (2012).

Material e Métodos

As etapas da metodologia para alcançar os objetivos desta pesquisa são: elaboração de um modelo da dinâmica veicular com três graus de liberdade (3 GdL), elaboração de algoritmos e simulação do comportamento dinâmico do veículo empregando esse modelo.

Na modelagem foi desenvolvido um modelo com 3 GdL de um veículo (velocidade de guinada, ângulo de deriva do veículo, rolagem e velocidade de rolagem) a partir da extensão do modelo com 2 GdL apresentado no trabalho de iniciação científica realizado em 2022 e citado na introdução deste trabalho. O modelo não linear de Pacejka, de 4 termos, foi empregado para a determinação da força lateral gerada no contato entre o pneu e o pavimento em função do ângulo de deriva nos pneus e da carga vertical em cada roda.

Esse modelo da dinâmica veicular foi implementado no programa Matlab, e os resultados das simulações do comportamento dinâmico do veículo foram apresentados na forma de gráficos das variáveis velocidade de guinada, aceleração lateral, ângulo de deriva do veículo e ângulo de rolagem, todos no domínio do tempo.

Devido ao comportamento não linear do modelo de pneu em relação à geração de força lateral, foi incluída no modelo de 3 GdL a transferência lateral de carga em cada eixo.

Os resultados obtidos a partir do modelo de 3 GdL foram comparados com aqueles gerados com o modelo completo de veículo, disponível no programa comercial para simulação da dinâmica veicular CarSim, que emprega um modelo multicorpos, com 16 graus de liberdade e 32 corpos e modelos matemáticos não lineares, tanto para os pneus quanto para os amortecedores. Os parâmetros utilizados nas simulações são compatíveis com um veículo classe C, e estão listados na Tabela 1.

Símbolo	Nomenclatura	Dimensões	Unidades
m _s	Massa suspensa do veículo	1274	kg
m	Massa total do veículo	1416	kg
а	Distância entre o CG e o eixo dianteiro	1016	mm
b	Distância entre o CG e o eixo traseiro	1562	mm
I_z	Momento de inércia do eixo Z	2226	$kg.m^2$
Iy	Momento de inércia do eixo Y	1770	$kg.m^2$
I_x	Momento de inércia do eixo X	690	$kg.m^2$
h	Altura do CG	538	mm
rch	Altura do Roll Center	210	mm
C_{oo}	Amortecimento torcional na rolagem	8724	Nm.s/rad
К,	Rigidez torcional na rolagem	63655	Nm/rad
$K_{\rm p}$	Distribuição de rigidez torcional à rolagem	54	%
$\frac{1}{1}$	Distância entre eixos	2578	mm
т Т	Bitola	1539	mm

Tabela 1 - Nomenclatura e dimensões dos parâmetros utilizados.

O modelo de veículo de 3 GdL considera as quatro rodas do veículo, nomeadas conforme indicado na Figura 1, para o cálculo das forças verticais e laterais em cada pneu.

Posteriormente condensa-se as duas rodas de cada eixo em um modelo bicicleta clássico, apresentado na Figura 2-a, com duas rodas equivalentes, onde se apresenta a definição da velocidade de guinada r e do ângulo de deriva do veículo β , duas das variáveis a serem calculadas pelo modelo de 3 GdL.

Para o cálculo do ângulo de rolagem ϕ e da transferência lateral de carga, dispõe-se a vista frontal do modelo, apresentada na Figura 2-b. Desta forma, valendo-se da variação do coeficiente de aderência do pneu em função da carga vertical e da não linearidade do modelo de Pacejka, obtém-se valores mais precisos para a magnitude das forças laterais geradas pelos pneus.

O modelo é adequado para curvas de grande raio de curvatura, onde o ângulo de esterçamento é pequeno e a diferença entre ângulos de esterçamento das rodas interna e externa pode ser desprezada.



Figura 1 – Vista superior do modelo do veículo

(Fonte: Ataei, Tang, Khajepour e Jeon)

Figura 2 – Modelo de 3 GdL: (a) Vista superior; (b) Vista Frontal.



A partir da Figura 2-a, obtém-se as relações cinemáticas e geométricas apresentadas nas equações de (1) a (3).

$$\tan\beta \cong \beta = \frac{v_y}{v_x} \tag{1}$$

$$\alpha_f = \delta - \frac{r \cdot a}{v_x} - \beta \tag{2}$$

$$\alpha_r = \frac{r \cdot b}{v_x} - \beta \tag{3}$$

Em seguida, foram calculadas as equações do movimento do veículo para a dinâmica lateral. Para v_x constante, $F_{xf} \cong 0$. Para curvas de grande raio, δ é pequeno, e $F_{yf} \cos \delta \cong F_{yf}$. Portanto, o somatório de forças na direção y é obtido pela equação (4).

$$F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} = ma_y$$
(4)

Sendo a aceleração lateral calculada a partir das equações (5) e (6).

$$a_y = \dot{v_y} + r^2 R \cos\beta \tag{5}$$

$$v_y = \beta v_x \to \dot{v_y} = \dot{\beta} v_x \to (\dot{v}_x = 0) \tag{6}$$

A partir das equações de (4) a (6), obtém-se:

$$F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} = ma_y = m(\dot{\beta}v_x + v_x r)$$
(7)

As forças F_{yi} são geradas pelo modelo de pneu, descrito a seguir.

São nos pneus que todas as forças atuantes em relação ao movimento do carro são geradas, portanto, é imprescindível que ele seja muito bem representado no modelo para que se tenha resultados fidedignos. No entanto, sua modelagem é bastante complexa.

E mesmo que ainda não totalmente descrita analiticamente, a modelagem do comportamento de um pneu pode ser bem aproximada por modelos empíricos embasados em dados obtidos em máquinas de ensaio com pneus. O programa CarSim os trata em função de interpolações lineares dos pontos fornecidos pelos dados de cada pneu.

Contudo, não é explícita a maneira como o programa CarSim trata os dados de pneu em seu código, mas supõe-se que seja a adaptação de um dos modelos de Pacejka – ainda empíricos, mas são os mais utilizados pela indústria automotiva, e os que mais se aproximam ao comportamento real do pneu.

Os modelos mais completos de Pacejka representam muito bem o comportamento de um pneu até em seu regime transiente, implementando fatores como temperatura, pressão e comprimento de relaxação. Mas ainda não são preditivos, ou seja, é necessária uma prévia rodada de ensaios experimentais para que sejam feitos os ajustes nas curvas que caracterizam o comportamento dinâmico do pneu.

Para o modelo de 3 GdL deste trabalho, foram empregados os dados dispostos no próprio programa CarSim, na forma de nuvens de pontos de força lateral em função dos valores de ângulos de deriva e de força vertical atuante sobre cada um dos pneus. E para implementálos em um algoritmo, foi utilizada uma das "fórmulas mágicas" (*Magic Formulas*) de Pacejka – o modelo de 4 termos, conforme equação (8).

$$F_{v} = F_{z}\mu \cdot D \, sen(C \, \operatorname{atan}(B(1-E)\overline{\alpha} + E \, \operatorname{tan}(B\overline{\alpha}))) \tag{8}$$

As constantes B, C, D e E são obtidas iterativamente observando o ajuste da curva gerada pelo modelo em relação aos dados coletados. O ângulo de deriva, adimensonal $\bar{\alpha}$, é descrito pela equação (9).

$$\bar{\alpha} = C_a \cdot \frac{\tan(\alpha)}{\mu F_z} \tag{9}$$

O cornering stiffness C_a é obtido empiricamente e varia conforme a carga vertical sobre o pneu. Foi feita uma regressão linear com os dados fornecidos e assim obteve-se uma função que descreve F_z , apresentada na Figura 3-a.

O coeficiente de aderência μ também é obtido em função da carga vertical, e novamente, foi realizada uma regressão linear para o descrever no modelo, conforme a Figura 3-b.



Associadas devido à transferência lateral de carga, a carga vertical F_z varia conforme a aceleração lateral e o ângulo de rolagem. O equacionamento que simula esse fenômeno é descrito pelas equações (10) e (11)¹.

$$\Delta F_{zf} = K_R \frac{ma_y H + m_s h_s g \cdot \sin(\varphi)}{T}$$
(10)

$$\Delta F_{zr} = (1 - K_R) \frac{ma_y H + m_s h_s g \cdot \sin(\varphi)}{T}$$
(11)

A variável ΔF_{zf} representa a transferência lateral de carga no eixo dianteiro e a variável ΔF_{zr} representa a transferência lateral de carga no eixo traseiro.

Finalmente, as cargas verticais sobre cada um dos pneus são descritas no modelo pelas equações de (11) a (14).

$$F_{z1} = F_{z0f} + \Delta F_{zf} \tag{12}$$

$$F_{z2} = F_{z0f} - \Delta F_{zf} \tag{13}$$

$$F_{z3} = F_{z0r} + \Delta F_{zr} \tag{14}$$

$$F_{z4} = F_{z0r} - \Delta F_{zr} \tag{15}$$

As equações diferenciais do movimento do veículo foram obtidas pela aplicação dos teoremas do movimento do baricentro e do momento angular.

O somatório de forças laterais (eixo y na Fig. 2-a) é dado pela equação (16).

¹ As equações (10) e (11) são validas para manobras em regime permanente. Em trabalhos futuros serão empregadas outras equações para cálculo da transferência lateral de carga.

$$\dot{\beta} = \frac{F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} - m_s h_s \ddot{\varphi} - m v_x r}{m v_x}$$
(16)

O somatório de momentos em torno do eixo z é dado pela equação (17).

$$\dot{r} = \frac{a(F_{y1} + F_{y2}) - b(F_{y3} + F_{y4})}{I_z}$$
(17)

O somatório de momentos em torno do eixo x é dado pela equação (18):

$$\ddot{\varphi} = \frac{\left[C_{\varphi}\dot{\varphi} + K_{\varphi}\varphi - m_{s}h_{s}v_{\chi}(\dot{\beta} + r)\right]}{I_{\chi} + m_{s}h_{s}}$$
(18)

As equações (16), (17) e (18) do modelo matemático de 3 GdL foram implementadas em uma rotina de cálculos no programa Matlab e a solução numérica das equações diferenciais foi obtida com o emprego da função *ode45*, que implementa o método de Runge-Kutta de 4^ª e 5^ª ordens.

A manobra empregada na comparação entre os resultados dos dois modelos de veículos considerados (modelo completo de veículo no programa CarSim e o modelo de 3 GdL) simulou o esterçamento repentino no volante, baseada na manobra normalizada denominada *step steer* (Rill e Castro, 2020). Nesta manobra, o veículo está em movimento retilíneo uniforme, quando é aplicado um esterçamento brusco que se mantém constante, até que as variáveis da resposta (a velocidade angular em guinada *r*, ângulo de deriva do veículo β e o ângulo de rolagem ϕ , neste trabalho) estabilizem em regime permanente. As Figura 4-a e 4-b mostram, respectivamente, a variação da velocidade do veículo e o ângulo de esterçamento do volante durante a manobra.

Resultados e Discussão

Com base na análise da manobra *step steer*, os resultados obtidos a partir da integração das equações diferenciais foram comparados com os da simulação do programa comercial CarSim, considerando o veículo trafegando a velocidade de 55 km/h. A escolha dessa velocidade teve o intuito de avaliar a aderência entre os modelos em acelerações laterais acima de 0,5g.





As curvas características de pneu geradas pelo programa CarSim foram comparadas com as curvas geradas pelo modelo de Pacejka de 4 termos, descrito pela equação (8). A Figura

5 apresenta quatro curvas de força lateral em função do ângulo de deriva para diferentes cargas verticais.

Vale ressaltar que para a manobra *step-steer*, na velocidade longitudinal de 55 km/h, o ângulo de deriva se mantém na região de 0 a 4°. No entanto, são apresentados resultados até 10° para se avaliar a validade do modelo de pneu em outras aplicações.



Figura 5 – Curvas de pneu: (a) Fz=1725N; (b) Fz=3500N; (c) Fz=6950N; (d) Fz=9005N.

Analisando os gráficos da Figura 5, nota-se que há correlação entre os resultados gerados a partir da equação (8) e os dados empregados pelo programa Carsim, principalmente na faixa entre 0 e 4°, que contempla a região do gráfico na qual se define um importante parâmetro característico do pneu, denominado *Cornering stiffness*. Para as cargas verticais mais elevadas, que representariam as rodas externas em uma curva e a maior parcela da carga lateral total, o resultado também é considerado satisfatório para os propósitos deste trabalho.

Com base na análise da manobra *step steer*, os resultados obtidos a partir da integração das equações diferenciais foram comparados com os da simulação do programa comercial CarSim, considerando o veículo trafegando a 55 km/h. Os gráficos mostram grandezas físicas de fácil aquisição por sensores com o uso de acelerômetros e sensores de rotação – que em trabalhos futuros podem ser empregadas em um sistema de controle em malha fechada. Os gráficos dos resultados obtidos com os modelos de 3 GdL e com o programa Carsim são mostrados na Figura 6.



Figura 6 – Resultados obtidos: (a) Aceleração lateral; (b) Ângulo de rolagem;
(c) Velocidade de guinada; (d) Ângulo de deriva do veículo.

Os resultados apresentados na Figura 6 foram analisados tanto em relação ao regime transiente como para o regime permanente. Os tempos de resposta transiente, assim como o coeficiente angular das retas nos trechos com resposta linear, gerados a partir do modelo de 3 GdL, apresentam correlação com os resultados do programa Carsim para a velocidade de guinada, aceleração lateral e ângulo de rolagem. No entanto, nota-se um desvio no ângulo de deriva do veículo, tanto na forma do gráfico quanto em seus valores de pico e tempo de resposta.

Em regime permanente, o modelo de 3 GdL mostrou aderência em relação à forma da curva de resposta, porém, principalmente para a aceleração lateral e a velocidade de guinada, houve diferença entre as magnitudes obtidas pelos dois modelos de veículo considerados neste trabalho.

Conclusões

O modelo de pneu empregado neste trabalho permitiu caracterizar o comportamento dinâmico em termos de força lateral, com aderência em relação ao modelo de pneu empregado nas simulações do programa Carsim para valores de ângulos de deriva presentes na manobra *step steer* a 55km/h.

Com relação às análises realizadas, comparando ambos os modelos em uma manobra *step steer* a 55km/h, o modelo de 3 GdL se mostrou condizente com o validado programa CarSim. As respostas transientes foram semelhantes aos resultados do fenômeno real – em inclinações iniciais, tempos de resposta e formatos de curva.

Em regime permanente, o modelo de 3GdL mostrou um desvio em relação à magnitude dos valores da aceleração lateral e velocidade de guinada. Ressalta-se que o modelo de veículo completo do CarSim considera forças e variáveis longitudinais, gerando redução de 5km/h na velocidade longitudinal durante os 5 segundos simulados na manobra *step steer* (Figura 4-a). Tal redução tem impacto tanto na aceleração lateral quanto na velocidade de guinada do

veículo, pois ambas são função da velocidade, o que explica o desvio na magnitude dessas variáveis em relação aos valores obtidos com o modelo do CarSim.

No entanto, ao considerar a aplicação deste modelo em trabalhos futuros relacionados a sistemas de controle, é possível contornar o desvio em regime permanente. Isso pode ser alcançado tanto pelo próprio sistema de controle em malha fechada quanto pela simples multiplicação dos valores por uma constante determinada empiricamente.

Referências Bibliográficas

- Ataei, M., Tang, C., Khajepour, A., & Jeon, S. (2019). Active camber system for lateral stability improvement of urban vehicles. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: *Journal of automobile engineering*, 233(14), 3824-3838.
- Chatzikomis, C. I.; Spentzas, K. N. (2014). Comparison of a vehicle equipped with Electronic Stability Control (ESC) to a vehicle with Four Wheel Steering (4WS), *Forschung im Ingenieurwesen*, **77 3-4**, https://doi.org/10.1007/s10010-014-0172-z.
- Gillespie, T. D. (2021). Fundamentals of Vehicle Dynamics 2nd ed. Warrendale.
- Hirschfeld, P. A., Malvezzi, F. (2022). Modelagem e análise da dinâmica veicular para avaliação de dirigibilidade.
- Lu, X.; Guo, K.; Lu, D.; Wang, Y. (2007). Effect of tire camber on vehicle dynamic simulation for extreme cornering, *Vehicle System Dynamics*, 44:sup 1, 39-49, https://doi.org/10.1080/00423110600867309.
- Malvezzi, F.; Hess Coelho, T. A.; Orsino, R. M. M. (2022). Feasibility and performance analyses for an active geometry control suspension system for over-actuated vehicles. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 44, 178, https://doi.org/10.1007/s40430-022-03448-4.
- Malvezzi, F.; Hess Coelho, T. A. (2015). Singularity and Workspace Analyses of a 3-DOF Parallel Mechanism for Vehicle Suspensions. *Mechanisms and Machine Science*. 1st ed. Springer International Publis., **31**, 311-319, https://doi.org/10.1007/978-3-319-17067-1_32.
- Malvezzi, F.; Hess Coelho, T. A. (2014). Topological Synthesis of a Novel Parallel Mechanism for Vehicle Rear Suspensions. *Mechanisms and Machine Science*. 1st ed.: Springer Netherlands, **17**, 33-40, https://doi.org/10.1007/978-94-007-7485-8_5.
- Pacejka, H. B. (2002). Tyre and vehicle dynamics. 2nd ed. Burlington, Butterworth-Heinemann.
- Rill, J.; Castro A. A. (2020). Road Vehicle Dynamics. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press.
- World Health Organization (2022). Road traffic injuries. https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/road-traffic-injuries. Acesso em: novembro de 2022.
- Zhang, W.; Drugge, L.; Nybacka, M.; Wang, Z. (2020). Active camber for enhancing path following and yaw stability of over-actuated autonomous electric vehicles, *Vehicle System Dynamics*, 59:5, 800-821.