

**FÁBIO ROBERTO GARCIA DE LIMA**

**ANÁLISE COMPARATIVA DE ESTRATÉGIAS  
DE CONTROLE MODERNAS APLICADAS NO  
CONTROLE DE VELOCIDADE DE UM  
SERVOMOTOR**

SÃO CAETANO DO SUL

2008

**FÁBIO ROBERTO GARCIA DE LIMA**

**ANÁLISE COMPARATIVA DE ESTRATÉGIAS  
DE CONTROLE MODERNAS APLICADAS NO  
CONTROLE DE VELOCIDADE DE UM  
SERVOMOTOR**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
Mauá do Centro Universitário do Instituto Mauá  
de Tecnologia para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia de Processos Químicos e  
Bioquímicos.

Linha de Pesquisa: Análise e Controle de  
Processos Químicos

Orientador: Prof. Dr. Wânderson O. Assis

**SÃO CAETANO DO SUL**

2008

Lima, Fábio Roberto Garcia de  
Análise Comparativa de Estratégias de Controle  
Modernas Aplicadas no Controle de Velocidade de um  
Servomotor / Fábio Roberto Garcia de Lima – São Caetano do  
Sul, SP: CEUN-EEM, 2008.  
193 p.

Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia Mauá  
do Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia.

1. Controle PID 2. Controle de Velocidade 3.  
Servomotores 4. Controle Fuzzy I. Lima, Fábio Roberto Garcia  
de II. Instituto Mauá de Tecnologia. Centro Universitário. III.  
Título

A minha amada esposa, Cláudia, com quem  
compartilho minhas alegrias e tristezas, vitórias  
e derrotas.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Wânderson pela amizade, incentivo e ajuda na conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Cláudio Garcia pelas contribuições ao longo do trabalho e pela participação na banca de qualificação.

A Prof<sup>a</sup>. Dr. Alessandra Dutra Coelho pela participação na banca de qualificação e mestrado.

Ao aluno de engenharia Miguel Afonso Negri pelas contribuições na execução dos ensaios práticos.

Ao Prof. Dr. Ângelo José Junqueira Rezek – UNIFEI pela participação na banca de mestrado.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise comparativa entre diversas estratégias de controle aplicadas ao controle de velocidade de um servomotor. Foram realizados o modelamento dos dispositivos do sistema, a sintonia e projeto de diversos controladores PID e nebulosos utilizando diversos métodos consagrados na literatura e em aplicações práticas na indústria. Estes controladores foram avaliados por meio de critérios no domínio do tempo, erro em regime permanente e critérios de erro integrado utilizando software de simulação por computador. Os controladores com os melhores desempenhos foram testados em sistema com aquisição de dados de forma a confirmar os resultados obtidos e estabelecer então uma análise comparativa entre os controladores.

**Palavras-chave:** Sintonia de Controladores PID, Acionamentos Controlados, Chopper CC, Controle Fuzzy, Máquinas Elétricas.

## ABSTRACT

This work presents a comparative analysis between applied control strategies of control to servomechanism speed control. The modeling of system devices, projects and tuning of PID and fuzzy controllers had been carried through, using methods presented in researches and industry practical applications. These controllers have been evaluated by time domain criterion, steady state error and integrated error criterion using computer simulation software. The best performance controllers have been implemented on data acquisition system to confirm the obtained results and to establish the comparative analysis of controllers.

**Key Words:** Tuning of PID Controllers, Drive Control, Chopper DC, Fuzzy Control, Electrical Machine.

## ÍNDICE

<b>AGRADECIMENTOS .....</b>	<b>IV</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>V</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>VI</b>
<b>ÍNDICE.....</b>	<b>VII</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>XI</b>
<b>ÍNDICE DE TABELAS .....</b>	<b>XV</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>XVI</b>
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2. MODELAGEM DO SISTEMA.....</b>	<b>6</b>
2.1. MODELAGEM DA MÁQUINA DE CORRENTE CONTÍNUA (MCC).....	6
2.1.1. <i>Conceitos Básicos</i> .....	6
2.1.2. <i>Constante de torque da MCC</i> .....	8
2.1.3. <i>Constante da força contra-eletromotriz do motor</i> .....	9
2.1.4. <i>Representação esquemática da MCC</i> .....	12
2.1.5. <i>Quadrantes de operação da MCC</i> .....	13
2.1.6. <i>Modelo matemático da MCC</i> .....	14
2.2. MODELAGEM DO MEDIDOR DE VELOCIDADE .....	17
2.3. MODELAGEM DO AÇÃOAMENTO .....	19
2.3.1. <i>Conversores CC-CC</i> .....	19

2.3.2. <i>Conversores CC-CC em ponte completa</i> .....	23
2.3.3. <i>Modulação por largura de pulso</i> .....	26
2.3.4. <i>Modelo matemático do acionamento</i> .....	28
2.4. VERIFICAÇÃO DOS MODELOS.....	28
2.4.1. <i>Funções de transferência dos dispositivos</i> .....	31
2.4.2. <i>Resultado das Simulações</i> .....	33
2.5. VALIDAÇÃO DO MODELO.....	35
2.6. KIT DE AQUISIÇÃO DE DADOS.....	36
2.7. CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO .....	42
2.8. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM MALHA FECHADA.....	44
2.9. ANÁLISE DE ESTABILIDADE.....	45
<b>3. CONTROLADORES PID ANALÓGICOS.....</b>	<b>52</b>
3.1. O ALGORITMO DO CONTROLADOR PID ANALÓGICO.....	52
3.1.1. <i>Modo proporcional</i> .....	53
3.1.2. <i>Modo proporcional-integral</i> .....	54
3.1.3. <i>Modo Proporcional-Derivativo</i> .....	55
3.1.4. <i>Modo Proporcional-Integral-Derivativo</i> .....	56
3.2. CRITÉRIOS PARA AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO.....	57
3.2.1. <i>Critérios de erro integrado</i> .....	57
3.2.2. <i>Erro em regime permanente</i> .....	58
3.2.3. <i>Critérios no domínio do tempo</i> .....	62
3.3. MÉTODOS DE SINTONIA E PROJETO DE CONTROLADORES PID ANALÓGICOS.....	63
3.3.1. <i>Método das oscilações contínuas de Ziegler-Nichols (OCZN)</i> .....	64
3.3.2. <i>Método da síntese direta</i> .....	67
3.3.3. <i>Projeto por cancelamento de pólos</i> .....	70
3.4. COMPARAÇÃO DOS CONTROLADORES OBTIDOS .....	74
3.4.1. <i>Resultados da primeira bateria de simulações</i> .....	75
3.4.2. <i>Resultados da segunda bateria de simulações</i> .....	81
3.5. CONCLUSÕES .....	83
<b>4. CONTROLADORES PID DIGITAIS.....</b>	<b>87</b>

4.1.	APROXIMAÇÃO DO TIPO DIFERENÇA OU INTEGRAÇÃO RETANGULAR PARA TRÁS .....	88
4.2.	APROXIMAÇÃO BILINEAR OU MÉTODO DE TUSTIN OU INTEGRAÇÃO TRAPEZOIDAL.....	90
4.3.	O TEMPO DE AMOSTRAGEM .....	91
4.4.	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DISCRETA EM MALHA ABERTA .....	92
4.5.	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DISCRETA EM MALHA FECHADA .....	97
4.6.	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DISCRETA DA CARGA .....	97
4.7.	ANÁLISE DE ESTABILIDADE.....	98
4.8.	MÉTODOS DE SINTONIA E PROJETO DE CONTROLADORES PID DIGITAIS .....	103
4.8.1.	<i>Método das oscilações continuas de Ziegler-Nichols .....</i>	104
4.8.2.	<i>Projeto por emulação .....</i>	105
4.9.	COMPARAÇÃO DOS CONTROLADORES DIGITAIS .....	112
4.9.1.	<i>Resultados da primeira bateria de simulações .....</i>	112
4.9.2.	<i>Resultados da segunda bateria de simulações .....</i>	116
4.10.	CONCLUSÕES .....	119
<b>5.</b>	<b>CONTROLADORES NEBULOSOS (FUZZY) .....</b>	<b>120</b>
5.1.	FUNDAMENTOS DA LÓGICA NEBULOSA .....	122
5.1.1.	<i>Conjuntos Nebulosos e funções de pertinência.....</i>	122
5.1.2.	<i>Operações Básicas entre conjuntos nebulosos .....</i>	124
5.1.3.	<i>Variáveis lingüísticas .....</i>	128
5.2.	ESTRUTURA E FUNCIONAMENTO DO CONTROLADOR NEBULOSO .....	129
5.3.	CONTROLADORES NEBULOSOS PROJETADOS .....	135
5.3.1.	<i>Controlador CN01 .....</i>	136
5.3.2.	<i>Controlador CN02 .....</i>	137
5.3.3.	<i>Controlador CN03 .....</i>	138
5.3.4.	<i>Controlador CN04 .....</i>	140
5.3.5.	<i>Controlador CN01d .....</i>	141
5.3.6.	<i>Controlador CN02d .....</i>	142
5.3.7.	<i>Controlador CN03d .....</i>	144
5.3.8.	<i>Controlador CN04d .....</i>	146
5.4.	COMPARAÇÃO DOS CONTROLADORES NEBULOSOS .....	148
5.4.1.	<i>Resultados da primeira bateria de simulações .....</i>	148
5.4.2.	<i>Resultados da segunda bateria de simulações .....</i>	153

5.5. CONCLUSÕES .....	156
<b>6. CONTROLE UTILIZANDO O SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS</b>	<b>157</b>
6.1. AVALIAÇÃO DOS CONTROLADORES NA PRÁTICA .....	157
<b>7. CONCLUSÕES FINAIS .....</b>	<b>167</b>
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>169</b>
<b>ANEXO.....</b>	<b>171</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - CONDUTOR ELÉTRICO MOVENDO-SE NUM CAMPO MAGNÉTICO .....	6
FIGURA 2.2 – REPRESENTAÇÃO DE UMA MCC COM UMA ESPIRA.....	8
FIGURA 2.3 – REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA DE UMA MCC .....	10
FIGURA 2.4 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UMA MCC .....	12
FIGURA 2.5 – QUADRANTES DE OPERAÇÃO DE UMA MCC .....	13
FIGURA 2.6 – DIAGRAMA DE BLOCOS DE UMA MCC .....	17
FIGURA 2.7 – REPRESENTAÇÃO DE UMA MCC E UM MEDIDOR.....	18
FIGURA 2.8 – CIRCUITO DE UM <i>CHOPPER</i> BÁSICO ACIONANDO UMA MCC.....	20
FIGURA 2.9 – ESQUEMA BÁSICO DO <i>CHOPPER</i> TIPO PONTE H .....	23
FIGURA 2.10 – CIRCUITO BÁSICO DE UM GERADOR PWM .....	26
FIGURA 2.11 – FORMAS DE ONDA DO MODULADOR PWM.....	27
FIGURA 2.12 – REPRESENTAÇÃO DO CICLO DE TRABALHO DO PWM PARA $V_m=1$ .....	27
FIGURA 2.13 – DIAGRAMA DE BLOCOS EM MALHA ABERTA.....	30
FIGURA 2.14 – COMPORTAMENTO DINÂMICO DA VELOCIDADE.....	34
FIGURA 2.15 – COMPORTAMENTO DINÂMICO DA SAÍDA DO MEDIDOR .....	35
FIGURA 2.16 – COMPORTAMENTO DINÂMICO DA SAÍDA DO MEDIDOR – OSCILOSCÓPIO.....	36
FIGURA 2.17 - KIT ELVIS® .....	37
FIGURA 2.18 – CIRCUITO DE ACIONAMENTO DO SERVOMOTOR E CONDICIONAMENTO DO SINAL DO TACOGERADOR.....	38
FIGURA 2.19 – COMPORTAMENTO DINÂMICO DA SAÍDA DO MEDIDOR – AQUISIÇÃO .....	39
FIGURA 2.20 - DETALHE DO PROGRAMA DE GERAÇÃO DO SINAL PWM .....	39
FIGURA 2.21 - COMPORTAMENTO DINÂMICO DA SAÍDA DO MEDIDOR – AQUISIÇÃO COMPLETA .....	40
FIGURA 2.22 - DIAGRAMA DE BLOCOS EM MALHA ABERTA COM SISTEMA DE AQUISIÇÃO .....	41
FIGURA 2.23 - COMPARATIVO DE RESPOSTA SIMULAÇÃO X SISTEMA PRÁTICO COM AQUISIÇÃO .....	42
FIGURA 2.24 - DIAGRAMA DE BLOCOS EM MALHA FECHADA .....	43
FIGURA 2.25 - LUGAR DAS RAÍZES DO SISTEMA EM TEMPO CONTÍNUO .....	49
FIGURA 2.26 - AMPLIAÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES .....	50
FIGURA 2.27 - SIMULAÇÃO PARA CONFIRMAR O GANHO E PERÍODO CRÍTICOS.....	50
FIGURA 3.1 - PARÂMETROS DE DESEMPENHO PARA RESPOSTA AO DEGRAU.....	63
FIGURA 3.2 – RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO – CONTROLADORES SINTONIZADOS PELO MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS .....	75

FIGURA 3.3 - RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO – CONTROLADORES SINTONIZADOS POR SÍNTSESE DIRETA E CANCELAMENTO DE PÓLOS .....	76
FIGURA 3.4 - SOBRE-SINAL MÁXIMO DOS CONTROLADORES ANALÓGICOS .....	78
FIGURA 3.5- TEMPOS DE ACOMODAÇÃO DOS CONTROLADORES ANALÓGICOS.....	78
FIGURA 3.6 - ERRO EM REGIME PERMANENTE.....	79
FIGURA 3.7 - ÍNDICES ITAE OBTIDOS DURANTE A 1A BATERIA DE SIMULAÇÕES .....	79
FIGURA 3.8 - ÍNDICES ITSE OBTIDOS DURANTE A 1A BATERIA DE SIMULAÇÕES.....	80
FIGURA 3.9 – RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO E VARIAÇÃO DE 0,2 NA CARGA – CONTROLADORES SINTONIZADOS PELO MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS.....	81
FIGURA 3.10 – RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO E VARIAÇÃO DE 0,2 NA CARGA – CONTROLADORES SINTONIZADOS POR SÍNTSESE DIRETA E CANCELAMENTO DE PÓLOS.....	82
FIGURA 3.11 - ÍNDICES ITAE OBTIDOS COM VARIAÇÃO DE CARGA .....	83
FIGURA 3.12 - ÍNDICES ITSE OBTIDOS COM VARIAÇÃO DE CARGA .....	83
FIGURA 3.13 – SINAIS DE CONTROLE PRODUZIDOS PELOS CONTROLADORES SINTONIZADOS POR ZIEGLER-NICHOLS .....	84
FIGURA 3.14 – SINAIS DE CONTROLE PRODUZIDOS PELOS CONTROLADORES SINTONIZADOS POR SÍNTSESE DIRETA E CANCELAMENTO DE PÓLOS.....	85
FIGURA 4.1 - DIAGRAMA DE BLOCOS DISCRETO EM MALHA ABERTA.....	92
FIGURA 4.2 - RESPOSTA AO DEGRAU UNITÁRIO EM MALHA ABERTA.....	96
FIGURA 4.3 - MALHA DE CONTROLE DIGITAL POR REALIMENTAÇÃO .....	97
FIGURA 4.4 - DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES PARA O SISTEMA DISCRETO.....	102
FIGURA 4.5 - GRÁFICO DO LUGAR DAS RAÍZES .....	109
FIGURA 4.6 - RESPOSTA AO DEGRAU DOS CONTROLADORES DIGITAIS EMULADOS .....	111
FIGURA 4.7 - RESPOSTA AO DEGRAU DOS CONTROLADORES DIGITAIS PROJETADOS POR ZIEGLER- NICHOLS.....	113
FIGURA 4.8 – SOBRE-SINAIS MÁXIMOS DOS CONTROLADORES DIGITAIS .....	113
FIGURA 4.9 – TEMPOS DE ACOMODAÇÃO DOS CONTROLADORES DIGITAIS .....	114
FIGURA 4.10 - ERRO DOS CONTROLADORES DIGITAIS.....	115
FIGURA 4.11 – ÍNDICES ITAE DOS CONTROLADORES DIGITAIS – 1 <sup>A</sup> BATERIA .....	115
FIGURA 4.12 – ÍNDICES ITSE DOS CONTROLADORES DIGITAIS – 1A BATERIA .....	116
FIGURA 4.13 - RESPOSTA AO DEGRAU E VARIAÇÃO DE CARGA – CONTROLADORES DIGITAIS PROJETADOS POR ZIEGLER-NICHOLS .....	117
FIGURA 4.14 - RESPOSTA AO DEGRAU E VARIAÇÃO DE CARGA - CONTROLADORES DIGITAIS EMULADOS .....	117
FIGURA 4.15 – ÍNDICES ITAE DOS CONTROLADORES DIGITAIS – 2A BATERIA .....	118
FIGURA 4.16 – ÍNDICES ITSE DOS CONTROLADORES DIGITAIS – 2A BATERIA .....	118

FIGURA 5.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DO CONJUNTO CLÁSSICO A.....	122
FIGURA 5.2 - DIAGRAMA DE ZADEH PARA O CONJUNTO NEBULOSO A .....	123
FIGURA 5.3 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA USUAIS .....	124
FIGURA 5.4 – DIAGRAMA DE ZADEH PARA A UNIÃO DOS CONJUNTOS NM E Z .....	125
FIGURA 5.5 – DIAGRAMA DE ZADEH PARA INTERSECÇÃO DOS CONJUNTOS A E B .....	126
FIGURA 5.6 – DIAGRAMA DE ZADEH PARA O CONJUNTO NEBULOSO “COMPLEMENTO DE A” .....	127
FIGURA 5.7 - DIAGRAMA DE ZADEH PARA A VARIÁVEL LINGÜÍSTICA “ERRO” .....	128
FIGURA 5.8 - ESTRUTURA DO CONTROLADOR NEBULOSO.....	129
FIGURA 5.9 - FUZZIFICAÇÃO .....	132
FIGURA 5.10 - INFERÊNCIA NEBULOSA .....	133
FIGURA 5.11 - COMPOSIÇÃO.....	134
FIGURA 5.12 - CONTROLADOR CN01 .....	136
FIGURA 5.13 – FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN01 .....	137
FIGURA 5.14 - CONTROLADOR CN02.....	137
FIGURA 5.15 – FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN02 .....	138
FIGURA 5.16 - CONTROLADOR CN03.....	139
FIGURA 5.17 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN03 .....	139
FIGURA 5.18 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN04 .....	140
FIGURA 5.19 - CONTROLADOR CN01D.....	141
FIGURA 5.20 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN01D.....	142
FIGURA 5.21 - CONTROLADOR CN02D.....	143
FIGURA 5.22 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN02D .....	143
FIGURA 5.23 - CONTROLADOR CN03D.....	144
FIGURA 5.24 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN03D .....	145
FIGURA 5.25 - CONTROLADOR CN04D.....	146
FIGURA 5.26 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN04PDD .....	146
FIGURA 5.27 - FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DO CONTROLADOR CN04ID .....	147
FIGURA 5.28 – RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO – CONTROLADORES NEBULOSOS ANALÓGICOS .....	149
FIGURA 5.29 – RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO – CONTROLADORES NEBULOSOS DIGITAIS .....	149
FIGURA 5.30 - SOBRE-SINAL MÁXIMO DOS CONTROLADORES NEBULOSOS .....	150
FIGURA 5.31 - TEMPOS DE ACOMODAÇÃO DOS CONTROLADORES NEBULOSOS.....	151
FIGURA 5.32 - ERRO EM REGIME PERMANENTE DOS CONTROLADORES NEBULOSOS .....	151
FIGURA 5.33 - ÍNDICES ITAE PARA OS CONTROLADORES NEBULOSOS – 1A BATERIA.....	152
FIGURA 5.34 - ÍNDICES ITSE PARA OS CONTROLADORES NEBULOSOS – 1A BATERIA .....	152
FIGURA 5.35 – RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO E VARIAÇÃO DE 0,2 NA CARGA – CONTROLADORES NEBULOSOS ANALÓGICOS .....	153

FIGURA 5.36 – RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO E VARIAÇÃO DE 0,2 NA CARGA – CONTROLADORES NEBULOSOS DIGITAIS .....	154
FIGURA 5.37 - ÍNDICES ITAE OBTIDOS COM VARIAÇÃO DE CARGA – CONTROLADORES NEBULOSOS	155
FIGURA 5.38 - ÍNDICES ITSE OBTIDOS COM VARIAÇÃO DE CARGA – CONTROLADORES NEBULOSOS	155
FIGURA 6.1 – SIMULAÇÃO DA RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES SINTONIZADOS PELO MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS – SIMULAÇÃO COM SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE.....	158
FIGURA 6.2 – SIMULAÇÃO DA RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES SINTONIZADOS POR SÍNTESE DIRETA E CANCELAMENTO DE PÓLOS – SIMULAÇÃO COM SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE.....	158
FIGURA 6.3 – DIAGRAMA DE BLOCOS DE SISTEMA HIPOTÉTICO COM CONTROLE PID, SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE E CONTROLE ANTI-WINDUP .....	159
FIGURA 6.4 – RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES SINTONIZADOS PELO MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS – ENSAIO COM SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS .....	161
FIGURA 6.5 – RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES SINTONIZADOS POR SÍNTESE DIRETA E POR CANCELAMENTO DE PÓLOS – ENSAIO COM SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS .....	161
FIGURA 6.6 – RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADOR GC8 – EFEITO DA UTILIZAÇÃO DO TEMPO DE AMOSTRAGEM APROPRIADO .....	162
FIGURA 6.7 – RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES DIGITAIS PROJETADOS POR ZIEGLER NICHOLS – ENSAIO COM SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS .....	163
FIGURA 6.8 – RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES DIGITAIS EMULADOS – ENSAIO COM SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS .....	163
FIGURA 6.9 – RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES FUZZY ANALÓGICOS – ENSAIO COM SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS .....	164
FIGURA 6.10 – RESPOSTA A DEGRAU DE 7,6 V – CONTROLADORES FUZZY DIGITAIS – ENSAIO COM SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS .....	164
FIGURA 6.11 - MOTORES UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS.....	165
FIGURA 6.12 - RESPOSTA PARA VARIAÇÕES NA CARGA.....	165
FIGURA 6.13 - CONTROLE DE POSIÇÃO .....	166

## ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 2.1 - QUADRANTES DE OPERAÇÃO DE UMA MCC – TABELA RESUMO .....	14
TABELA 2.2 - DADOS DE CATÁLOGO DO MOTOR.....	30
TABELA 2.3 – DADOS DE CATÁLOGO DO TACOGERADOR .....	31
TABELA 2.4 - ARRANJO TABULAR DE ROUTH .....	47
TABELA 3.1 – VALORES DOS PARÂMETROS DO CONTROLADOR POR ZIEGLER-NICHOLS .....	65
TABELA 3.2 – VALORES OBTIDOS PARA OS PARÂMETROS DE SINTONIA.....	66
TABELA 4.1 - ARRANJO TABULAR DE ROUTH .....	101
TABELA 4.2 – VALORES DOS PARÂMETROS DE SINTONIA PARA OS CONTROLADORES DIGITAIS .....	104
TABELA 4.3 – VALORES DOS PARÂMETROS DE SINTONIA .....	110

## LISTA DE SÍMBOLOS

$e_m$  - Força contra-eletromotriz (Volts)

$V$  – Velocidade (m/s)

$L$  – Comprimento (m)

$B$  - Densidade de fluxo magnético – (Wb/m)

$r$  – Resistência elétrica (ohm)

$I$  - Corrente elétrica – (A)

$F$  – Força (N)

$T$  – Torque Mecânico – (Nm)

$R$  – Raio das espiras de uma bobina (m)

$K_t$  – Constante de torque de uma maquina de corrente continua (Nm/A)

$\phi$  - Fluxo Magnético (Wb)

$K_e$  – Constante da força contra-eletromotriz de uma maquina de corrente continua (V/rad/s)

$A$  – Área ( $m^2$ )

$\omega_m$  - Velocidade angular do rotor (rad/s)

$R_a$  – Resistência da armadura (ohm)

$L_a$  – Indutância de armadura (Henries)

$i_a$  – Corrente do circuito de armadura (A)

$v_t$  – Tensão terminal do circuito de armadura (volts)

$T_m$  – Torque magnético do motor (Nm)

$T_c$  – Torque resistente da carga (Nm)

$J$  – Inércia do rotor

$b$  - Coeficiente de atrito viscoso devido aos rolamentos do motor

$J_t$  – Inércia do rotor do tacogerador

$G_M$  – Função de Transferência do Motor que relaciona a rotação da máquina às variações da tensão de armadura

$G_L(s)$  – Função de Transferência da carga que relaciona a rotação da máquina às variações no torque da carga

$i_{at}$  – Corrente do circuito de armadura do tacogerador (A)

$v_{tt}$  – Tensão terminal do circuito de armadura do tacogerador (volts)

$R_{at}$  – Resistência da armadura do tacogerador (ohm)

$L_{at}$  – Indutância de armadura do tacogerador (Henries)

$v_m$  – Tensão medida na saída do circuito divisor de tensão (volts)

$K_{et}$  – Constante da força contra-eletromotriz do tacogerador (V/rad/s)

$G_{MM}(s)$  – Função de Transferência do tacogerador que relaciona a tensão na saída do circuito divisor de tensão com a velocidade angular

$T$  – Período de chaveamento do conversor CC-CC

$F$  – Freqüência de chaveamento do conversor CC-CC

$\sigma$  – Ciclo de trabalho do conversor CC-CC

$v_f$  – Tensão da fonte de alimentação (volts)

$G_{AC}$  – Função de transferência do sistema de acionamento

$K_{AC}$  – Ganho do sistema de acionamento

$K_{MM}$  – Ganho do medidor

$G_{ma}$  – Função de transferência em malha aberta

$\omega_n$  - Freqüência natural não amortecida – (rad/s)

$\phi$  - Coeficiente de amortecimento

$G_{AQ}$  – Função de transferência do sistema de aquisição de dados

$K_{AQ}$  – Ganho do sistema de aquisição de dados

$\omega_R$  – Velocidade angular de referência

$K_{CU}$  – Ganho crítico do sistema

$K_C$  – Ganho proporcional

$m$  – Sinal de controle

e – erro

$T_i$  – Tempo Integral

$T_d$  – Tempo derivativo

## 1. INTRODUÇÃO

Servomotores são motores de alta precisão, geralmente de pequenas dimensões, que podem ser utilizados em várias aplicações de engenharia. Alguns deles são dotados de um sistema de realimentação para medição e controle de sua velocidade de rotação ou posição.

Podemos encontrar servomotores nos dispositivos de reprodução e gravação de CD's e DVD's, câmeras móveis de segurança, fornos de microondas, sistemas de posicionamento de antenas e radares, robôs industriais, máquinas de precisão, lentes motorizadas, máquinas copiadoras, impressoras, scanners, válvulas motorizadas de controle, e em muitos outros dispositivos de nosso dia-a-dia.

O sistema de controle de velocidade proposto será composto de um motor de corrente contínua, do tipo ímã permanente, um medidor de velocidade, constituído de um tacogerador acoplado ao eixo do motor e um circuito divisor de tensão e, finalmente, um circuito de acionamento utilizando modulação por largura de pulso e um conversor CC-CC, que permitirá o controle do motor nos quatro quadrantes de operação.

O controle da velocidade do motor será desenvolvido por meio de algoritmos PID e nebulosos, ou *fuzzy*, os quais serão avaliados por simulações e usando sistema experimental com aquisição de dados, para estabelecermos um comparativo do desempenho de cada um dos métodos, considerando, especialmente para o PID, diversas técnicas de sintonia e projeto.

O controlador proporcional-integral-derivativo (PID) foi patenteado em 1939 (US Patent 2175985) por Albert Callender e Allan Stevenson da “*Imperial Chemical Limited of Northwich*”, Inglaterra; e foi um grande avanço em relação aos métodos de

controle anteriores, automáticos ou manuais. Desde então, o uso deste tipo de controlador foi largamente difundido na indústria (especialmente na indústria química) devido à simplicidade, baixo custo e pequeno número de parâmetros a serem configurados.

Em 1942, Ziegler e Nichols publicaram um artigo com o título “*Optimum Settings for Automatic Controllers*”, no qual desenvolveram um conjunto de regras matemáticas para a sintonia dos parâmetros associados aos blocos derivativos, integrais e proporcionais de um controlador PID.

As regras de Ziegler-Nichols são consideradas clássicas, sendo amplamente utilizadas na sintonia de controladores PID, seja em seu formato original, seja em formatos modificados.

Outras técnicas de sintonia, tais como os métodos de Cohen-Coon, Åstrom e Hägglund, as técnicas de otimização de critérios integrais, pólo dominante, cancelamento de pólos, alocação de pólos, “*Internal Model Control*” e margens de fase e de amplitude, foram desenvolvidas desde então, porém as mais populares e utilizadas ainda são as Ziegler-Nichols.

Nos últimos anos diversos novos métodos modernos de controle estão se popularizando, tais como o controle nebuloso ou *Fuzzy*, as redes neurais e os controladores Neuro-Fuzzy, porém, ainda assim, em mais de 90% das malhas de controle industriais são utilizados controladores PID (ÅSTRÖM et al, 1995). Sabemos, porém, que a maioria destas malhas opera mal sintonizada, gerando gastos adicionais que poderiam ser minimizados, justificando-se então a importância do assunto sintonia (ÅSTRÖM et al, 1995).

A eficiência das regras utilizadas para sintonia de controladores é de considerável importância prática, pois pequenos ganhos na operação de uma planta ou sistema, proporcionados por uma melhor sintonia dos seus controladores, podem ser traduzidos em grandes economias de matéria-prima com benefícios diretos ao meio-ambiente, tais como a minimização dos dejetos industriais e dos recursos materiais necessários à produção. Outros benefícios diretos são a diminuição do esforço de controle, o que se traduz numa maior vida útil de dispositivos, válvulas e atuadores, menores tempos de parada das operações em função de falhas, bem como uma economia com custos de peças de reposição e mão-de-obra de manutenção (GARCIA, 2001).

Sabemos, porém, que o controlador PID é pouco eficiente ao lidar com sistemas de ordem superior ou com alto tempo morto e neste caso existem benefícios na utilização de controladores mais sofisticados (ÅSTRÖM et al, 1995).

A teoria dos conjuntos nebulosos ou *fuzzy* foi apresentada em 1965 por Zadeh em seu trabalho “*Fuzzy Sets*” (ZADEH, 1965). Ela propõe uma extensão dos conceitos da teoria dos conjuntos clássica. Nesta um elemento pertence ou não a determinado conjunto, enquanto que na teoria dos conjuntos nebulosos um elemento pertence ou não a um conjunto com determinado grau de pertinência (ou verdade). De fato a teoria dos conjuntos clássica pode ser entendida como um caso particular da teoria dos conjuntos nebulosos.

A lógica nebulosa desenvolvida a partir da teoria dos conjuntos nebulosos foi utilizada com sucesso em 1974 por E. H. Mandami e S. Assilian para controle de uma máquina a vapor (TSOUKALAS et al, 1997), após inúmeras tentativas fracassadas com diversas outras técnicas, inclusive o controle PID. Em 1980 a técnica de controle nebuloso foi pela primeira vez aplicada numa planta industrial de produção de cimento

e a partir de então diversas outras aplicações para o controle nebuloso foram desenvolvidas, sendo que atualmente temos sistemas de freio anti-bloqueio (ABS), máquinas de lavar pratos, câmeras de vídeo com ajuste automático de foco, sistemas para processamento de imagens e recentemente aplicações em sistemas eletrônicos de potência (ASSIS, 1997) entre outras.

Uma vez que a lógica nebulosa dispõe de mecanismos para lidar com as imprecisões das informações ela tornou-se uma alternativa ao controle PID para sistemas mais complexos ou ainda para controle de sistemas com não-linearidades (SHAW et al, 1999).

A maioria dos controladores industriais já possui blocos de funções *Fuzzy* disponíveis para uso. Vários pacotes de software, também, já incorporam esta técnica, de forma que podemos então implementá-la sem grandes custos adicionais com software e hardware.

Este trabalho está organizado como descrito abaixo:

No capítulo 2 apresentaremos a descrição do servomotor e suas aplicações. Faremos ainda a modelagem dos dispositivos do sistema, apresentando então suas funções de transferência.

No capítulo 3 iremos estabelecer uma malha de controle por realimentação e projetar diversos controladores PID, utilizando os métodos de sintonia mais difundidos na literatura.

No capítulo 4 implementaremos o controle digital do servomotor e por meio de simulações e uso de índices de desempenho, faremos uma análise comparativa com os controladores analógicos obtidos.

O capítulo 5 apresentará os fundamentos e o projeto de controladores nebulosos. Estes controladores serão avaliados por simulações verificando os índices de desempenho e comparados aos controladores PID desenvolvidos anteriormente.

O capítulo 6 apresentará a realização prática do controle de velocidade do servomotor usando computador e sistema de aquisição de dados. Os algoritmos de controle desenvolvidos anteriormente serão implementados utilizando o pacote de desenvolvimento gráfico LabVIEW® e o kit educacional ELVIS® (*Educational Laboratory Virtual Instrumentation Suite*) da National Instruments que receberá os dados provenientes do dispositivo de medição, bem como enviará os sinais de controle para um circuito de acionamento. O circuito de acionamento será projetado, baseado no circuito integrado L298 da ST Microelectronics, que possui dois conversores CC-CC tipo ponte H completos, para controle do servomotor nos quatro quadrantes de operação. Os resultados obtidos em LabVIEW® serão comparados aos obtidos anteriormente por simulações.

O capítulo 7 apresentará um resumo dos resultados obtidos e as conclusões sobre o desempenho de cada metodologia. Trabalhos de continuidade serão propostos.

## 2. MODELAGEM DO SISTEMA

O objetivo desta etapa será o desenvolvimento dos modelos matemáticos lineares dos dispositivos do sistema de acionamento visando realização de simulações para posterior projeto de controladores para o controle de velocidade do motor.

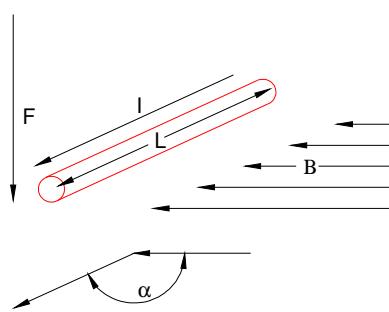
### 2.1. Modelagem da Máquina de Corrente Contínua (MCC)

#### 2.1.1. Conceitos Básicos

Sabemos que um condutor elétrico movendo-se na área de influência de um campo magnético constante apresentará uma diferença de potencial chamada de força contra-eletromotriz “ $e_m$ ”, em suas extremidades.

A força contra-eletromotriz gerada é proporcional à velocidade “ $V$ ” na qual o condutor se movimenta, ao seu comprimento “ $L$ ” e a densidade de fluxo “ $B$ ” do campo magnético, ou seja:

$$e_m = B \cdot L \cdot V$$



**Figura 2.1 - Condutor elétrico movendo-se num campo magnético**

Se este condutor for parte de um circuito elétrico com resistência “ $r$ ”, então a força contra-eletromotriz produzirá uma corrente elétrica “ $I$ ” que pode ser calculada por:

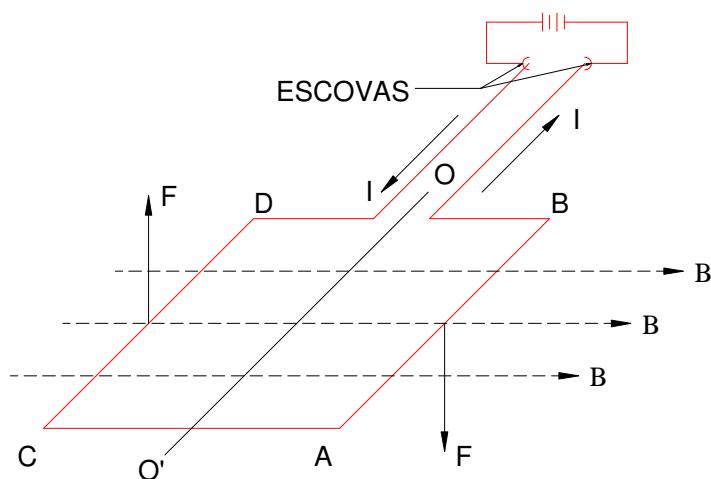
$$I = \frac{e_m}{r} = \frac{B \cdot L \cdot V}{r}$$

Essa corrente por sua vez irá gerar uma força “F”, perpendicular aos vetores da corrente e da densidade de fluxo, mostrada na Figura 2.1 acima, cuja expressão é:

$$F = B \cdot L \cdot I \cdot \text{Seno } \alpha, \text{ onde } \alpha \text{ é o ângulo entre os vetores "B" e "I".}$$

O sentido da força “F” é definido pela regra da mão direita que afirma que dispondo o polegar da mão direita ao longo do condutor e no sentido da corrente e os demais dedos envolvendo o condutor estes indicarão o sentido das linhas do vetor indução magnética e o dedo médio indicará o sentido do vetor força.

A Figura 2.2 ilustra uma espira, onde circula uma corrente “I”, num campo magnético constante, com densidade de fluxo “B”, montada num eixo rotacional O-O’. Verificamos que o circuito elétrico é fechado através das escovas. A corrente ao circular pela espira, no segmento CD irá gerar uma força “F” perpendicular aos vetores da corrente e da densidade de fluxo, com sentido definido pela regra da mão direita e no segmento AB perpendicular aos vetores da corrente e da densidade de fluxo, com sentido definido pela regra da mão direita, oposta à força gerada no segmento CD. Podemos verificar que as correntes que circulam pelos segmentos paralelos ao campo magnético, não geram força alguma, uma vez que o seno de  $180^\circ$  é igual a zero.



**Figura 2.2 – Representação de uma MCC com uma espira**

Na Figura 2.2 podemos verificar ainda que as forças “F” em oposição irão gerar um torque “T” que movimentará a espira no sentido horário. Quando a espira atingir um ângulo de 90° em relação às escovas, o contato elétrico cessará e a corrente deixará de circular. Neste instante não haverá nenhuma força atuando devido ao campo magnético, porém, por inércia a espira continuará a girar até atingir a posição 180°, quando então o fluxo de corrente se restabelecerá, gerando novamente as forças que farão com que a espira continue a girar.

Este é o princípio básico de funcionamento dos motores de corrente contínua.

### **2.1.2. Constante de torque da MCC**

O torque gerado no segmento AB da espira da Figura 2.2, pode ser calculado por:

$T_{AB} = F_{AB} \cdot R = R \cdot B \cdot L_{AB} \cdot I \cdot \text{Seno } \alpha$ , onde “R” é o raio da espira. Se tivermos mais de um condutor nesta espira a expressão pode ser generalizada como segue abaixo:

$$T_{AB} = N \cdot R \cdot B \cdot L_{AB} \cdot I \cdot \text{Seno } \alpha$$

Assumiremos o ângulo  $\alpha=90^\circ$ , visto que o vetor da corrente elétrica será perpendicular ao vetor do campo magnético, logo o seno deste ângulo será igual à unidade e a expressão acima se reduzirá a:

$$T_{AB} = N \cdot R \cdot B \cdot L_{AB} \cdot I$$

O torque gerado no segmento CD da espira da Figura 2.2, será calculado de forma análoga.

$$T_{CD} = N \cdot R \cdot B \cdot L_{CD} \cdot I$$

O torque total do motor é igual ao torque gerado por cada um dos segmentos, então:

$$T = T_{AB} + T_{CD} = (N \cdot R \cdot B \cdot L_{AB} \cdot I) + (N \cdot R \cdot B \cdot L_{CD} \cdot I)$$

Como a espira possui lados iguais, então  $L_{AB}=L_{CD}=L$ , logo podemos reescrever a expressão acima como segue:

$$T = \underbrace{2 \cdot N \cdot B \cdot R \cdot L \cdot I}_{K_t} \quad (2.1)$$

Podemos verificar pela equação acima que o torque gerado num motor com uma única espira é função da quantidade de condutores nessa espira, do comprimento dos segmentos, da densidade de fluxo magnético, do raio das espiras e da corrente que circula pela espira.

Com exceção da corrente, todos os demais parâmetros são relacionados à geometria do motor, e aos materiais com que ele foi construído, ou seja, são parâmetros determinados no projeto do motor e, portanto são constantes. Podemos então definir uma constante de proporcionalidade entre a corrente elétrica que circula pela armadura do motor e o torque desenvolvido pelo mesmo. Essa constante será chamada de constante de torque e será calculada por:

$$K_t = \frac{T}{I}, \text{ cuja unidade, no Sistema Internacional (SI) será dada em } \left[ \frac{N \cdot m}{A} \right].$$

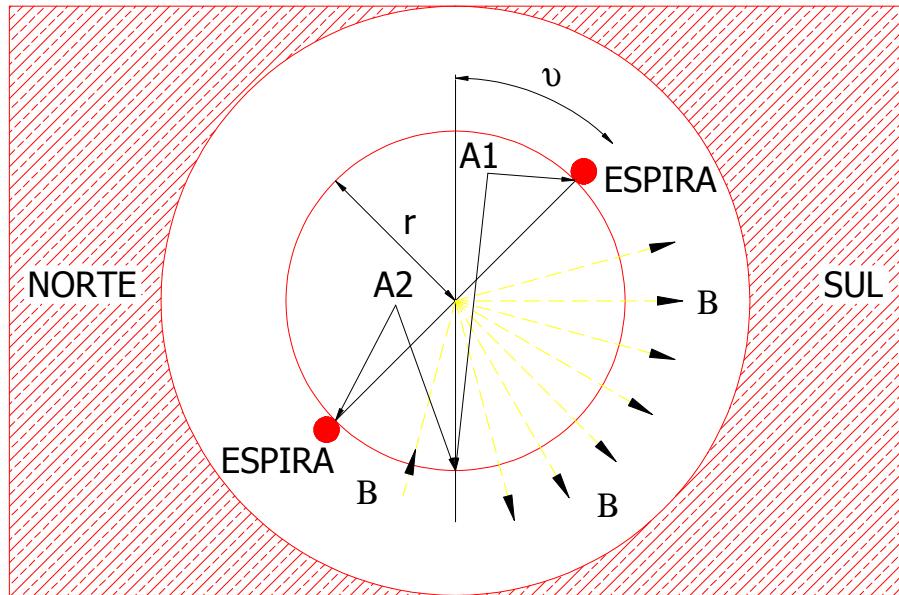
$$T = K_t \cdot I \quad (2.2)$$

### 2.1.3. Constante da força contra-eletromotriz do motor

De acordo com a Lei de Indução de Faraday, se uma espira de um material condutor for colocada sob a influência de um campo magnético variante no tempo, uma tensão será induzida através dela. Esta tensão é chamada de força contra-eletromotriz.

A força contra-eletromotriz pode ser calculada por:

$e = -\frac{d\phi}{dt}$  Onde “ $\phi$ ” é o fluxo magnético que passa através da superfície definida pela espira.



**Figura 2.3 – Representação da geometria de uma MCC**

**FONTE: (NISE, 2000).**

Na Figura 2.3, podemos verificar um esquema da situação descrita acima.

A densidade do fluxo “B” será dada por:

$B = \phi/A$ , onde “A” é a área da superfície do meio cilindro envolvido pela espira, logo substituindo na equação da força contra-eletromotriz obteremos:

$$e = -\frac{d(B \cdot A)}{dt}$$

Mas densidade de fluxo “B” é constante em qualquer posição deste meio cilindro, então:

$$e = -B \cdot \frac{d \cdot A}{dt}$$

A área pelo qual o fluxo magnético atravessa, do centro do cilindro para a sua superfície, é o produto da circunferência pelo comprimento do cilindro:

$$A = A_1 - A_2 = R \cdot (\pi - \theta) \cdot L - R \cdot \theta \cdot L = R \cdot L \cdot (\pi - 2 \cdot \theta)$$

Substituindo a equação da área na equação da força contra-eletromotriz obteremos:

$$e = -B \cdot \frac{d(R \cdot L \cdot (\pi - 2 \cdot \theta))}{dt} = -B \cdot R \cdot L \frac{d(\pi - 2 \cdot \theta)}{dt} = 2 \cdot B \cdot R \cdot L \frac{d\theta}{dt} = 2 \cdot B \cdot R \cdot L \cdot \omega_m$$

Onde “ $\omega_m$ ” é a velocidade angular do eixo do motor.

Estendendo o raciocínio para um motor com N espiras podemos reescrever a equação acima como segue:

$$e = \underbrace{2 \cdot N \cdot B \cdot R \cdot L \cdot \omega_m}_{K_e} \quad (2.3)$$

Novamente, podemos verificar que os termos indicados acima são determinados no projeto do motor e portanto são constantes ao longo do tempo, permitindo-nos definir então a constante da força contra-eletromotriz  $K_e = e / \omega_m$ , cuja unidade, no sistema internacional será dada em  $\left[ \frac{V}{rad/s} \right]$ .

$$e = K_e \cdot \omega_m \quad (2.4)$$

Verificamos, através das equações (2.1) e (2.3) que num sistema consistente de unidades, o valor da constante da força contra-eletromotriz é igual ao valor da constante de torque.

O conjunto composto pelas espiras, escovas e eixo do motor é chamado de rotor. O circuito elétrico definido pelas espiras e escovas é chamado de armadura e possui uma resistência “ $R_a$ ” e uma indutância “ $L_a$ ”, as quais são funções do número de espiras.

### 2.1.4. Representação esquemática da MCC

A seguinte representação esquemática será utilizada para o desenvolvimento do modelo matemático e da respectiva função de transferência da MCC:

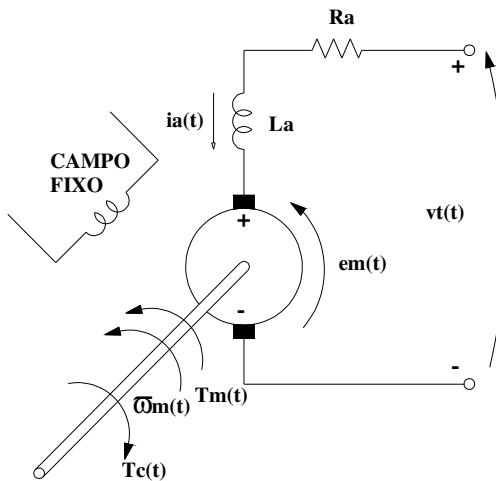


Figura 2.4 - Representação esquemática de uma MCC

Onde:

- $e_m(t)$  Força contra-eletromotriz (FCEM)
- $R_a$  Resistência do circuito de armadura
- $L_a$  Indutância do circuito de armadura
- $i_a(t)$  Corrente do circuito de armadura
- $v_t(t)$  Tensão terminal do circuito de armadura
- $T_m(t)$  Torque (conjugado) magnético do motor
- $T_c(t)$  Torque (conjugado) resistente da carga
- $\omega_m(t)$  Velocidade angular do rotor
- $J$  Inércia do rotor
- $b$  Coeficiente de atrito viscoso devido aos rolamentos do motor
- $K_e$  Constante de força contra-eletromotriz
- $K_t$  Constante de torque do motor

### 2.1.5. Quadrantes de operação da MCC

Para efeito de controle de velocidade podemos definir quatro quadrantes de operação para uma MCC. Estes quadrantes definem aspectos de frenagem e aceleração de uma MCC.

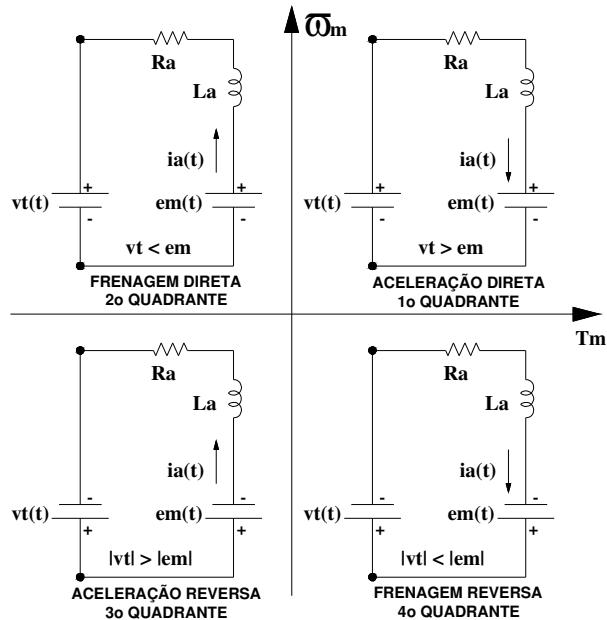


Figura 2.5 – Quadrantes de operação de uma MCC

A Figura 2.5 demonstra as polaridades para a tensão  $v_t(t)$  nos terminais do motor, força contra-eletromotriz  $e_m(t)$  e corrente de armadura  $i_a(t)$ .

No 1º quadrante de operação todas as grandezas são positivas, incluindo a velocidade e o torque. Neste caso o motor está acelerando no sentido positivo.

No 2º quadrante, o motor continua a girar no sentido positivo e, desta forma a força contra-eletromotriz permanece positiva. A corrente neste quadrante deve ser negativa, e consequentemente, teremos torque negativo e fluxo de energia do motor para a fonte. Neste caso a máquina estará freando, e como o fluxo de energia se dá do motor para a fonte chamamos este tipo de frenagem regenerativa. A tensão de armadura neste quadrante deve ser mantida menor que a força contra-eletromotriz.

Para acelerarmos no sentido negativo, devemos operar no 3º quadrante onde todas as grandezas são negativas. Para mantermos o torque negativo e a energia fluindo da fonte para o motor, o módulo da tensão terminal deverá ser maior que a força contra-eletromotriz.

No 4º quadrante a frenagem também será regenerativa. O motor continua a girar no sentido negativo, logo a força contra-eletromotriz será negativa. Para o torque ser positivo e a energia fluir do motor para a fonte, a corrente de armadura deverá ser positiva. O módulo da tensão terminal deverá ser menor que a força contra-eletromotriz.

A Tabela 2.1 apresenta um resumo das considerações acima.

**Tabela 2.1 - Quadrantes de operação de uma MCC – Tabela Resumo**

<b>Quadrante de operação</b>	<b>Torque (<math>t_m</math>)</b>	<b>Velocidade (<math>\omega_m</math>)</b>	<b>Sentido de rotação</b>	<b>Variação da velocidade</b>
I	Positivo	Positiva	Positivo	Acelera
II	Negativo	Positiva	Positivo	Freia
III	Negativo	Negativa	Negativo	Acelera
IV	Positivo	Negativa	Negativo	Freia

### 2.1.6. Modelo matemático da MCC

Aplicando as leis de Kirchhoff ao circuito elétrico da armadura do motor teremos:

$$v_t(t) = e_m(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a \cdot i_a(t)$$

Substituindo a equação (2.4) na equação acima teremos:

$$v_t(t) = K_e \cdot \omega_m(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a \cdot i_a(t) \quad (2.5)$$

Considerando a máquina operando em regime permanente, ou seja, desprezando o termo que possui a derivada da corrente de armadura, a equação (2.5) pode ser simplificada conforme abaixo:

$$\omega_m(t) = \frac{v_t(t) - R_a \cdot i_a(t)}{K_e}$$

Inspecionando a equação acima percebemos que podemos controlar uma MCC (ímã permanente) variando a resistência de armadura ou a tensão de armadura.

O controle, efetuado pela variação da resistência foi muito utilizado na tração elétrica, porém, mais recentemente o controle tem sido feito através da variação da tensão terminal, visto que esta técnica produz ajustes mais rápidos além de adicionalmente permitir o controle do torque gerado (POMILIO, 2002).

Considerando as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace à equação (2.5) teremos:

$$V_t(s) = K_e \cdot W_m(s) + (R_a + s \cdot L_a) \cdot I_a(s)$$

Substituindo a equação da constante de torque (2.2) na expressão acima teremos:

$$V_t(s) = K_e \cdot W_m(s) + (R_a + s \cdot L_a) \cdot \frac{T_m(s)}{K_t} \quad (2.6)$$

Pela lei do equilíbrio dos momentos podemos calcular o torque do motor:

$$T_m(t) = b \cdot \omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + J_t \frac{d\omega_m(t)}{dt} + T_c(t), \text{ onde } "J_t" \text{ é a inércia do tacogerador.}$$

Considerando as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace à equação acima, teremos:

$$T_m(s) = b \cdot W_m(s) + s \cdot J \cdot W_m(s) + s \cdot J_t \cdot W_m(s) + T_c(s)$$

$$T_m(s) = [b + s \cdot (J + J_t)] \cdot W_m(s) + T_c(s) \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.5) na equação (2.4) obteremos:

$$V_t(s) = K_e \cdot W_m(s) + (R_a + s \cdot L_a) \cdot \frac{[b + s \cdot (J + J_t)] \cdot W_m(s) + T_c(s)}{K_t}$$

$$V_t(s) \cdot K_t = [K_e \cdot K_t + [b + s \cdot (J + J_t)] \cdot (R_a + s \cdot L_a)] \cdot W_m(s) + T_c(s) \cdot (R_a + s \cdot L_a)$$

Isolando  $W_m(s)$  na expressão acima encontraremos então uma equação que relacionará a velocidade da MCC em função da tensão terminal na armadura e do torque da carga.

$$W_m(s) = \frac{K_t \cdot V_t(s) - (R_a + s \cdot L_a) \cdot T_c(s)}{K_e \cdot K_t + R_a \cdot b + s \cdot ((J + J_t) \cdot R_a + b \cdot L_a) + s^2 \cdot (J + J_t) \cdot L_a} \quad (2.8)$$

A equação acima representa o modelo completo da MCC. Para os desenvolvimentos a seguir desprezaremos os atritos nos rolamentos e escovas do motor em função de seu pequeno valor e então reduziremos a equação acima conforme mostrado abaixo:

$$W_m(s) = \frac{K_t \cdot V_t(s) - (R_a + s \cdot L_a) \cdot T_c(s)}{K_e \cdot K_t + s \cdot (J + J_t) \cdot R_a + s^2 \cdot L_a \cdot (J + J_t)} \quad (2.9)$$

Pelo princípio da superposição podemos calcular os efeitos individualmente para as variações da tensão de armadura e variações da carga e somá-los posteriormente.

Considerando que não ocorrerão variações no torque podemos desenvolver a função de transferência  $G_M(s)$  que relaciona a rotação da máquina às variações da tensão de armadura:

$$G_M(s) = \frac{W_m(s)}{V_t(s)} = \frac{K_t}{K_e \cdot K_t + s \cdot (J + J_t) \cdot R_a + s^2 \cdot L_a \cdot (J + J_t)} \quad (2.10)$$

Da mesma forma, considerando as variações na tensão de armadura nulas, obteremos a função de transferência  $G_L(s)$  que relaciona a rotação da máquina às variações no torque da carga:

$$G_L(s) = \frac{W_m(s)}{T_c(s)} = -\frac{(R_a + s \cdot L_a)}{K_e \cdot K_t + s \cdot (J + J_t) \cdot R_a + s^2 \cdot L_a \cdot (J + J_t)} \quad (2.11)$$

As equações acima nos permitem construir o diagrama de blocos da Figura 2.6, o qual representa uma MCC.

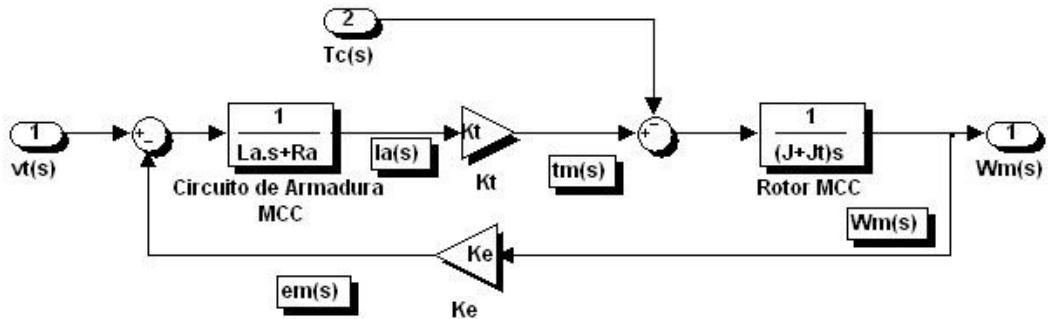


Figura 2.6 – Diagrama de blocos de uma MCC

## 2.2. Modelagem do medidor de velocidade

O tacogerador será o dispositivo utilizado para medir a rotação da MCC. Esse dispositivo é um pequeno gerador acoplado ao eixo do motor, que produzirá nos terminais de sua armadura, uma tensão proporcional à rotação do conjunto. Dessa forma faremos a medição da velocidade indiretamente.

Podemos verificar na Figura 2.7 a representação esquemática do tacogerador, da MCC e de um circuito divisor de tensão presente nos terminais do tacogerador.

O circuito divisor de tensão será o responsável por adequar os níveis de tensão gerados pelo tacogerador aos níveis de tensão da placa de aquisição de dados, de forma a protegê-la contra tensões maiores que as suportadas por suas entradas.

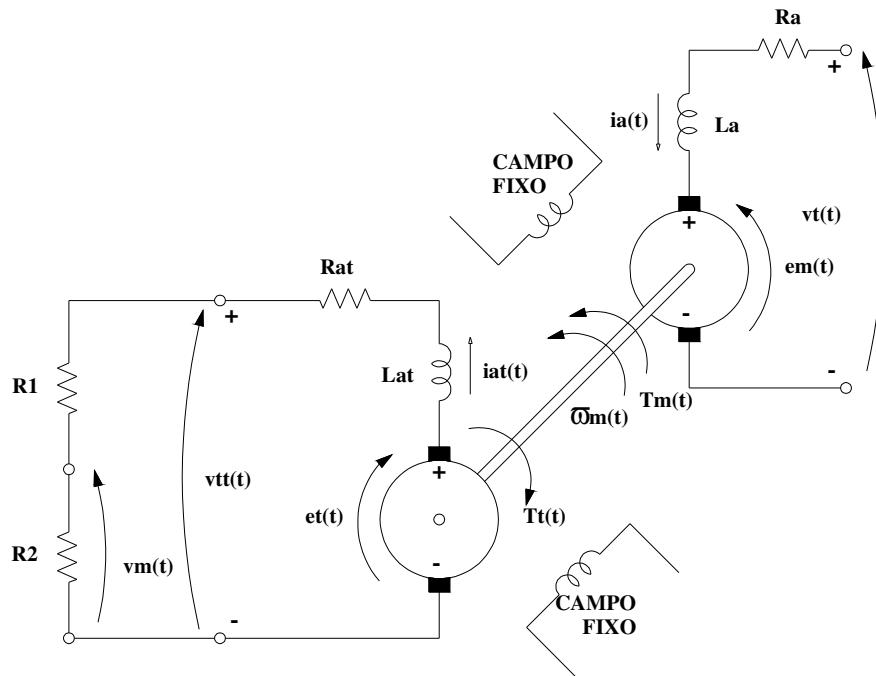


Figura 2.7 – Representação de uma MCC e um medidor

Aplicando as leis de Kirchhoff ao circuito elétrico da armadura do tacogerador obteremos as seguintes relações:

$$(R_1 + R_2 + R_{at}) \cdot i_{at}(t) + L_{at} \frac{di_{at}(t)}{dt} = e_t(t)$$

$$(R_1 + R_2 + R_{at}) \cdot i_{at}(t) + L_{at} \frac{di_{at}(t)}{dt} = K_{et} \cdot \omega_m(t)$$

$$i_{at}(t) = \frac{v_m(t)}{R_2}$$

Supondo as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace às equações acima, teremos:

$$K_{et} \cdot W_m(s) = [(R_1 + R_2 + R_{at}) + s \cdot L_{at}] \cdot I_{at}(s) \quad (2.12)$$

$$I_{at}(s) = \frac{V_m(s)}{R_2} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.12) obteremos uma equação que relaciona a rotação do conjunto motor/tacogerador com a tensão medida nos terminais do circuito divisor de tensão.

$$K_{et} \cdot W_m(s) = [(R_1 + R_2 + R_{at}) + s \cdot L_{at}] \cdot \frac{V_m(s)}{R_2}$$

Manipulando algebricamente a equação acima obteremos a função de transferência do medidor  $G_{MM}(s)$  que relaciona a tensão na saída do circuito divisor de tensão com a velocidade angular:

$$G_{MM}(s) = \frac{V_m(s)}{W_m(s)} = \frac{K_{et} \cdot R_2}{[(R_1 + R_2 + R_{at}) + s \cdot L_{at}]} \quad (2.14)$$

Concluímos que como a função de transferência acima possui apenas um polo e um ganho ela representa um sistema de primeira ordem sem atraso de transporte (tempo morto).

### **2.3. Modelagem do Acionamento**

#### **2.3.1. Conversores CC-CC**

Para o acionamento do motor nos quatro quadrantes utilizaremos um conversor CC-CC ou *chopper* com ponte completa. Com este tipo de circuito podemos controlar a corrente ou a tensão de armadura, acelerando, revertendo ou freando o motor.

Os conversores CC-CC convertem uma tensão contínua, não regulada, de entrada numa tensão de saída, também contínua, porém regulada, através do controle do tempo de condução de transistores ou outros dispositivos que possam trabalhar como chaves.

As aplicações mais comuns dos conversores CC-CC são as fontes chaveadas, controle de tração, controle de servomotores e carregadores de bateria entre outras.

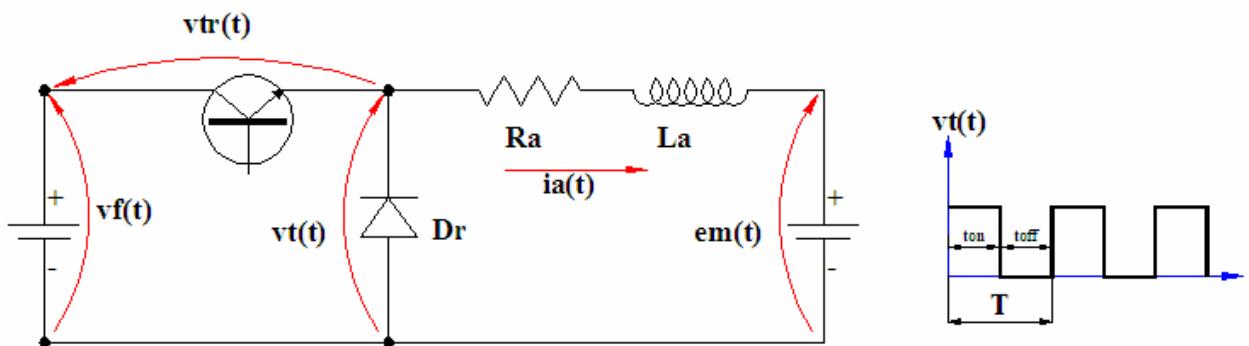


Figura 2.8 – Circuito de um *chopper* básico acionando uma MCC

O princípio de funcionamento do conversor CC-CC pode ser verificado através da Figura 2.8, que ilustra um circuito básico para um *chopper* acionando um motor CC.

A tensão sobre a carga aparece conforme o transistor entra em corte ou condução, através da polarização adequada de sua base.

A tensão média nos terminais de saída do conversor CC-CC pode ser calculada por:

$$\bar{v}_t = \frac{1}{T} \int_0^{t_{on}} v_t(t) dt = \frac{t_{on}}{T} \cdot v_f(t) = f \cdot t_{on} \cdot v_f(t) \quad (2.15)$$

Onde:

- $T \rightarrow$  Período de chaveamento
- $f \rightarrow$  Freqüência de chaveamento
- $\sigma = \frac{t_{on}}{T} \rightarrow$  Ciclo de trabalho do *chopper*

O ciclo de trabalho pode ser variado entre 0 (zero) e 1 (um), variando o tempo  $t_{on}$ , em que o transistor está conduzindo. Conseqüentemente, ao variarmos o ciclo de trabalho podemos controlar a tensão sobre a carga.

O controle do ciclo de trabalho pode ser obtido pela variação da freqüência de chaveamento ou mantendo-a constante, variando-se então o tempo em que a chave permanece fechada. A primeira opção não é usual uma vez que este tipo de controle pode gerar harmônicos difíceis de serem eliminados, e então costuma optar-se pela segunda, chamada de Modulação por Largura de Pulso ou PWM do inglês “*pulse width modulation*”.

Na Figura 2.8 podemos verificar ainda que quando o transistor está conduzindo (chave fechada) a corrente circula entre o positivo e o negativo da fonte de alimentação e quando ele está em corte (chave aberta) a corrente circula através do diodo  $D_r$ , chamado de diodo de retorno ou do inglês “*freewheeling diode*”.

A corrente na carga  $i_{a1}$ , durante o período em que a chave está fechada no intervalo  $0 \leq t \leq t_{on}$  pode ser calculada como segue:

$$v_f(t) = R_a \cdot i_{a1}(t) + L_a \frac{di_{a1}(t)}{dt} + e_m(t) \quad (2.16)$$

Supondo as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace à equação (2.16) obteremos:

$$V_f(s) = R_a \cdot I_{a1}(s) + s \cdot L_a \cdot I_{a1}(s) + E_m(s)$$

$$I_{a1}(s) = \frac{V_f(s) - E_m(s)}{(R_a + s \cdot L_a)} = \frac{(V_f(s) - E_m(s))/L_a}{\frac{R_a}{L_a} + s} \quad (2.17)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace à equação (2.17) teremos:

$$i_{a1}(t) = \frac{v_f(t) - e_m(t)}{L_a} \cdot e^{-\left(\frac{R_a}{L_a}\right)t} \quad (2.18)$$

Redefinindo a origem dos tempos no momento em que a chave abre, enquanto a chave permanecer aberta, no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_{off}$ , a corrente  $i_{a2}$  que circulará pela carga será dada por:

$$0 = R_a \cdot i_{a2}(t) + L_a \frac{di_{a2}(t)}{dt} + e_m(t) \quad (2.19)$$

Supondo as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace à equação (2.19) obteremos:

$$0 = R_a \cdot I_{a2}(s) + s \cdot L_a \cdot I_{a2}(s) + E_m(s)$$

$$I_{a2}(s) = \frac{-E_m(s)}{(R_a + s \cdot L_a)} = \frac{-E_m(s)/L_a}{(R_a/L_a) + s} \quad (2.20)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a equação (2.20) teremos:

$$i_{a2}(t) = \frac{-e_m(t)}{L_a} \cdot e^{-\left(\frac{R_a}{L_a}\right)t} \quad (2.21)$$

Dependendo do valor da indutância e do tempo em que a chave fique aberta, a corrente na carga pode chegar a zero. Chamamos a isso de Modo de Condução Descontínua. Neste modo a corrente média, pela carga, é menor que no modo de Condução Contínua, onde a corrente nunca chega a zero, consequentemente o torque gerado, que depende da corrente que circula pelo circuito de armadura do motor, será menor, tornando a frenagem e a aceleração menos eficientes.

Trabalharemos sempre no modo de condução contínua de forma a garantir a eficiência da frenagem e aceleração, para tal, o período de chaveamento deverá ser muito menor que a constante elétrica do motor.

Dentre as diversas configurações de conversores CC-CC, a única que permite o controle de uma máquina de corrente contínua nos quatro quadrantes de operação é o conversor CC-CC em ponte completa ou Ponte H, a qual detalharemos a seguir.

### 2.3.2. Conversores CC-CC em ponte completa

Na Figura 2.9 podemos verificar o esquema básico da ponte H. Os transistores atuam sempre como chaves, sendo que, ao aplicarmos a correta polarização em suas bases eles entram em corte ou em saturação, permitindo ou não a circulação de corrente entre o emissor e o coletor.

Polarizando convenientemente as bases dos pares de transistores podemos controlar o sentido da corrente que circula pela carga, que em nosso caso será o motor, consequentemente mudando o seu sentido de rotação e controlando-o nos quadrantes um e três. Os diodos associados à carga garantem o caminho de recirculação da corrente da carga para a fonte atuando nos quadrantes dois e quatro. Nestes quadrantes teremos a frenagem regenerativa, onde a potência flui da carga para a fonte.

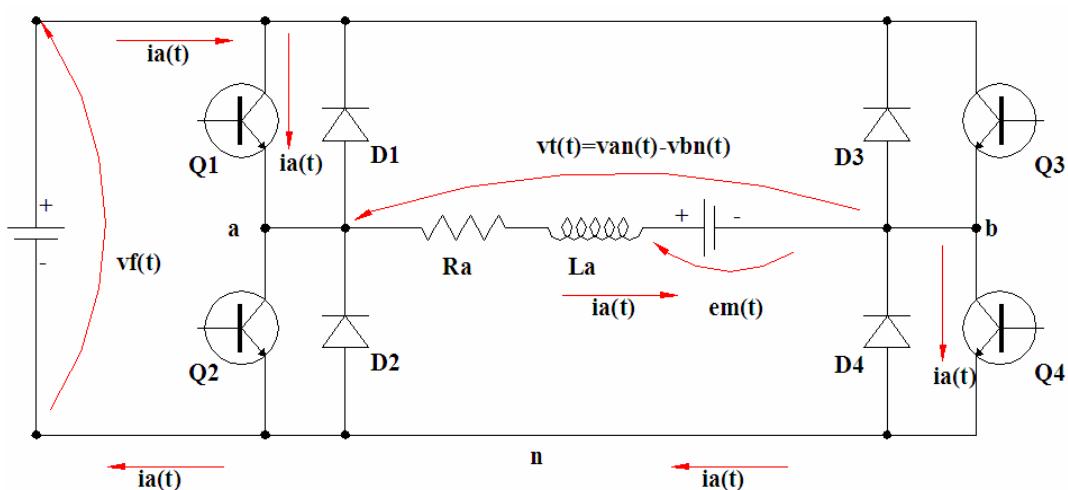


Figura 2.9 – Esquema básico do *chopper* tipo ponte H

Para operação nos quatro quadrantes os semicondutores envolvidos devem ser comandados da seguinte forma:

### **1º QUADRANTE - Aceleração sentido direto (positivo)**

No 1º quadrante de operação tanto o torque quanto a velocidade do motor devem ser positivos. Neste caso as bases dos transistores Q1 e Q4 devem ser adequadamente polarizadas forçando-os a conduzir, enquanto os transistores Q2 e Q3 devem estar cortados. Nesta situação, a corrente flui pelos terminais do motor, no sentido positivo, e a queda de tensão será positiva também, atendendo os requisitos para operação no 1º quadrante. A MCC irá acelerar.

### **2º QUADRANTE - Frenagem regenerativa – sentido direto (positivo)**

No 2º quadrante de operação a velocidade deve ser positiva enquanto o torque deve ser negativo. Para tal, o motor deve continuar girando no sentido direto, com velocidade positiva, porém a corrente de armadura deve ter seu sentido invertido, passando a ser negativa. A MCC neste caso comporta-se como um gerador, ou seja, ela força a corrente fluir de volta a fonte.

Nesta situação, os transistores Q1 e Q4, que estavam conduzindo, são levados ao corte e a MCC, força a corrente a retornar para a fonte através dos diodos D1 e D4 que passam a conduzir propiciando o caminho necessário.

### **3º QUADRANTE - Aceleração – sentido reverso (negativo)**

No 3º quadrante de operação tanto o torque quanto a velocidade do motor devem ser negativos. Neste caso as bases dos transistores Q2 e Q3 devem ser adequadamente polarizadas forçando-os a conduzir, enquanto os transistores Q1 e Q4 devem estar cortados. Nesta situação, a corrente flui pelos terminais do motor, no sentido negativo, e a queda de tensão será negativa também, atendendo os requisitos para operação no 3º quadrante. A MCC acelerará no sentido reverso.

#### 4º QUADRANTE - Frenagem regenerativa – sentido reverso (negativo)

No 4º quadrante de operação a velocidade deve ser negativa enquanto o torque é positivo. Para tal, o motor deve continuar girando no sentido reverso, porém a corrente de armadura deve fluir para a fonte no sentido positivo. A MCC neste caso comportar-se como um gerador, ou seja, ela força a corrente fluir de volta a fonte.

Nesta situação, os transistores Q2 e Q3, que estavam conduzindo, são levados ao corte e a MCC, força a corrente a retornar para a fonte através dos diodos D2 e D3 que passam a conduzir propiciando o caminho necessário.

Conforme verificamos acima, os transistores e diodos irão operar aos pares, logo, desprezando as perdas nas junções semicondutoras, poderemos calcular o valor médio da tensão terminal  $v_t(t)$  como segue:

$$v_t(t) = v_{an} - v_{bn} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{on1}} v_t(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^{t_{on2}} v_t(t) dt = \frac{t_{on1}}{T} \cdot v_f - \frac{t_{on2}}{T} \cdot v_f = (\sigma_1(t) - \sigma_2(t)) \cdot v_f \quad (2.22)$$

Onde:

- $\sigma_1(t)$  é o ciclo de trabalho do par de transistores Q1/Q4
- $\sigma_2(t)$  é o ciclo de trabalho do par de transistores Q2/Q3
- $t_{on1}$  é o tempo em que os transistores Q1/Q4 estão em condução
- $t_{on2}$  é o tempo em que os transistores Q2/Q3 estão em condução

Mas  $\sigma_1(t) + \sigma_2(t) = 1$  e substituindo em (2.22) teremos:

$$v_t(t) = (2 \cdot \sigma_1(t) - 1) \cdot v_f \quad (2.23)$$

Podemos verificar que para  $0 \leq \sigma_1 \leq 1$  teremos  $-v_f \leq v_t(t) \leq v_f$  onde  $v_f$  é a tensão de alimentação da ponte H (constante), que em nosso caso será igual a doze Volts.

### 2.3.3. Modulação por largura de pulso

Para o controle do tempo de condução dos transistores do conversor CC-CC (*chopper*) será utilizada a técnica da modulação por largura de pulso ou PWM (*Pulse Width Modulation*), onde a freqüência de chaveamento dos transistores é constante, e o que varia é o tempo em que eles permanecem em condução ou em corte.

A Figura 2.10 ilustra um circuito básico de um PWM, composto de um gerador de onda “dente-de-serra” e um comparador.

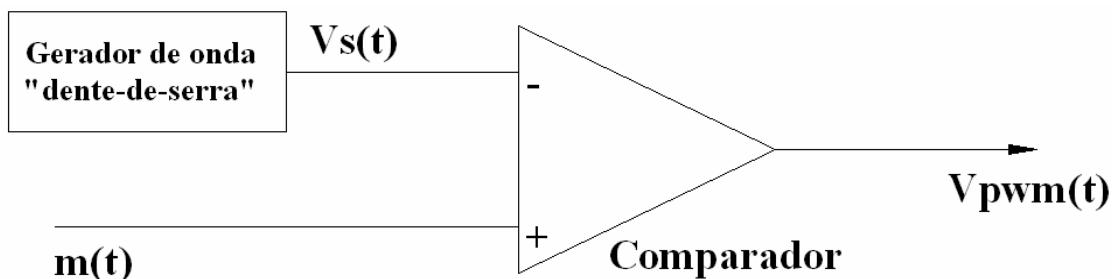


Figura 2.10 – Circuito básico de um gerador PWM

Para gerar o sinal PWM um sinal de controle modulante  $m(t)$  é comparado a uma onda portadora periódica  $V_s(t)$ , que poderá ser uma onda triangular ou tipo dente de serra, com valor de pico  $V_m$  e freqüência (constante)  $f=1/T$ , de forma a gerar na saída um sinal pulsante  $V_{pwm}(t)$ .

O sinal de saída possuirá um nível alto, com valor igual à  $V_m$ , sempre que o sinal de controle for maior que o sinal da onda portadora. Caso contrário possuirá um nível baixo, com valor igual a  $-V_m$ . Defini-se como ciclo de trabalho do PWM, o quociente entre o período proporcional ao sinal de entrada  $m(t)$  com freqüência igual a da onda portadora.

As formas de onda do PWM podem ser verificadas através da Figura 2.11.

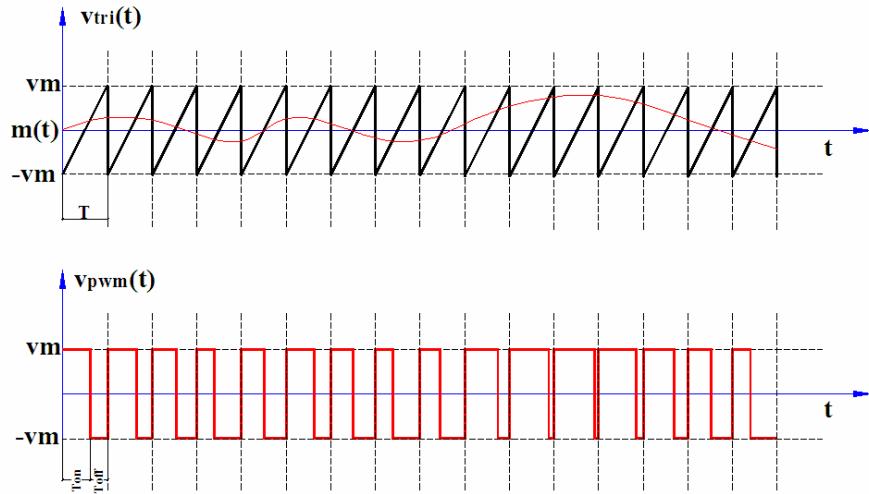


Figura 2.11 – Formas de onda do modulador PWM

O sinal de saída  $V_{\text{pwm}}(t)$  é periódico, com freqüência igual à da onda portadora e ciclo de trabalho  $\sigma(t)$ .

Dentro do intervalo  $-V_m \leq m(t) \leq V_m$  o ciclo de trabalho será uma função linear do sinal de controle, conforme demonstrado na Figura 2.12.

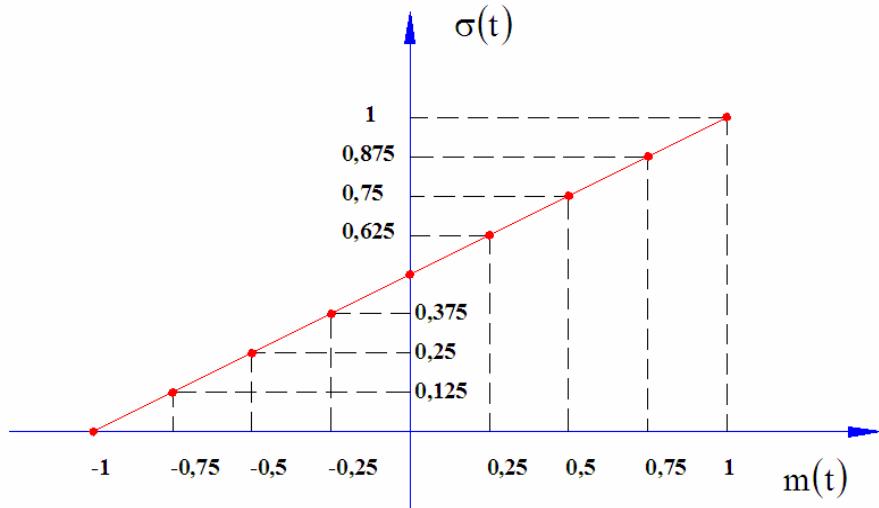


Figura 2.12 – Representação do ciclo de trabalho do PWM para  $V_m=1$

Das definições acima podemos escrever:

$$\sigma(t) = \frac{m(t) + 1}{2 \cdot V_m} \quad \text{para} \quad -V_m \leq m(t) \leq V_m$$

Impondo  $V_m$  igual a um, teremos na saída do modulador PWM, pulsos com amplitude igual a um. Portanto a equação acima ficaria reduzida a:

$$\sigma(t) = \frac{m(t) + 1}{2} \quad \text{para} \quad -1 \leq m(t) \leq 1 \quad (2.24)$$

### 2.3.4. Modelo matemático do acionamento

Substituindo a equação (2.24) na equação (2.23) teremos  $v_t(t) = m(t) \cdot v_f$

Supondo as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace teremos:

$$G_{AC}(s) = \frac{V_t(s)}{M(s)} = v_f = K_{AC} = 12 \quad (2.25)$$

Portanto a função de transferência do acionamento pode ser representada apenas por um ganho.

## 2.4. Verificação dos modelos

Para verificar as funções de transferência obtidas anteriormente faremos uso do Simulink®, que é um pacote de simulação do MATLAB®, comparando os resultados obtidos com os dados fornecidos pelo fabricante do motor, tacogerador e o projeto do medidor.

Realizaremos um ensaio em malha aberta aplicando um degrau unitário na entrada do sistema.

O uso do degrau unitário como sinal de teste é válido, pois conforme deduzimos através da equação (2.24), o acionamento será linear para  $-1 < m(t) < 1$ .

Ao aplicarmos o degrau unitário na entrada do sistema esperamos obter a velocidade nominal do motor  $\omega_m=555$  rad/s, uma vez que a tensão de saída do circuito de acionamento deverá ser de 12 Volts.

O tacogerador utilizado neste projeto produzirá em seus terminais  $41,1 \cdot 10^{-3}$  V/(rad/s). Isto significa que quando o conjunto estiver em rotação nominal ( $\omega_m=555$  rad/s) a tensão nos terminais do tacogerador será de 22,79 Volts, que é um valor superior ao suportado pela placa de aquisição de dados cujo limite é de 10 Volts, justificando, portanto, o uso do circuito divisor de tensão.

Pelos dados do tacogerador, a resistência da carga deve ser maior ou igual a  $25\text{ k}\Omega$ , logo projetaremos o divisor com dois resistores, cuja soma dos valores deverá ser de  $30\text{ k}\Omega$  respeitando assim a especificação do tacogerador e dividindo a tensão de saída por três, de forma a mantê-la dentro dos limites da placa de aquisição.

O resistor  $R_1$  do modelo da Figura 2.7 deverá ser de  $20\text{ k}\Omega$  e o resistor  $R_2$  de  $10\text{ k}\Omega$ . Nesta situação, o valor esperado para a tensão de saída  $V_m$  do tacogerador será de 7,6 Volts.

Em resumo, ao aplicarmos um degrau unitário na entrada do sistema, devemos obter 7,6 Volts na saída.

O diagrama de blocos em malha aberta da Figura 2.13 será utilizado para as simulações. Para a verificação do modelo não foram consideradas eventuais variações no torque da carga.

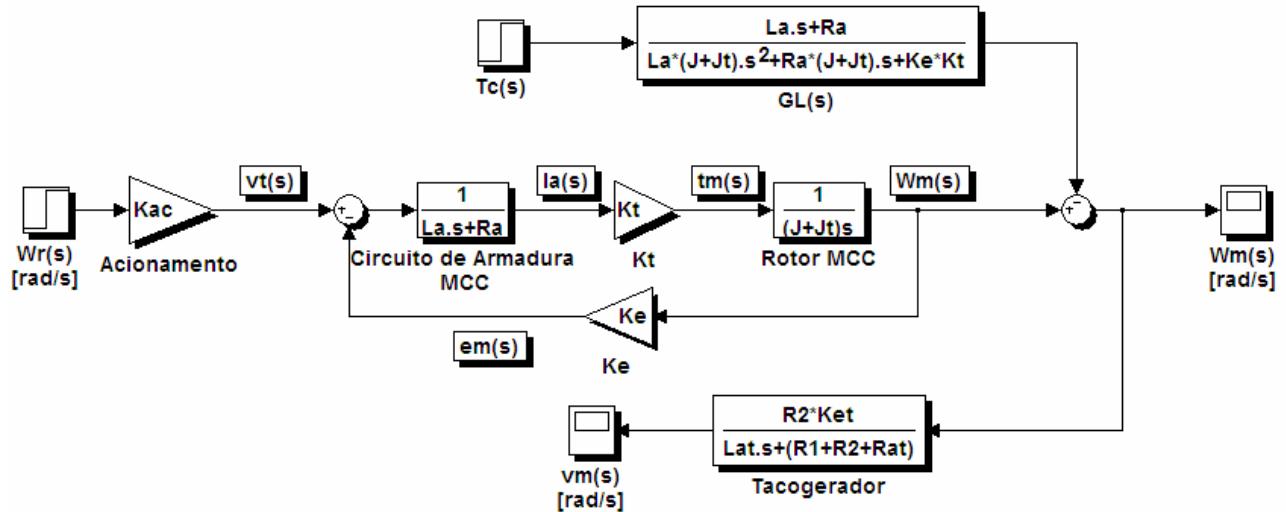


Figura 2.13 – Diagrama de Blocos em malha aberta

Para as simulações foram utilizados os dados de catálogo dos equipamentos, fornecidos pelo fabricante, os quais são apresentados na Tabela 2.2 e na Tabela 2.3.

Tabela 2.2 - Dados de catálogo do motor

Característica	Símbolo	Valor	Unidade
Tensão nominal	$U_N$	12	Volt
Resistência da armadura	$R_a$	0,5	$\Omega$
Máxima velocidade do motor, sem carga, a tensão nominal	$n_0$	555	rad/s
Máxima corrente do motor, sem carga, a tensão nominal	$I_0$	0,2	A
Stall torque – Torque desenvolvido pelo motor, a velocidade zero e tensão nominal.	$M_H$	$5 \cdot 10^{-3}$	Nm
Constante de força contra-eletromotriz	$Ke$	$2,1486 \cdot 10^{-2}$	V/(rad/s)
Constante de torque	$K_t$	$2,14 \cdot 10^{-2}$	Nm/A
Indutância do rotor	$L_a$	65	$\mu$ H
Inércia do rotor	$J$	$64 \cdot 10^{-7}$	$\text{Kg m}^2$

**Tabela 2.3 – Dados de catálogo do tacogerador**

Característica	Símbolo	Valor	Unidade
Resistência da carga	$R_i$	$\geq 25$	$k\Omega$
Resistência da armadura	$R_{at}$	260	$\Omega$
Máxima velocidade de operação	$\eta_{emax.}$	523,6	rad/s
Constante de força contra-eletromotriz	$K_{et}$	$41,1 \cdot 10^{-3}$	$V/(rad/s)$
Indutância do rotor	$L_{at}$	7000	$\mu H$
Inércia do rotor	$J_t$	$1,65 \cdot 10^{-7}$	$Kgm^2$

#### 2.4.1. Funções de transferência dos dispositivos

Substituindo os dados dos equipamentos nas equações (2.10), (2.11) e (2.14) obteremos, respectivamente, as funções de transferência para a MCC (para variações no valor de referência e na carga) e o medidor.

Para a variação da velocidade da MCC em relação à variação da tensão terminal teremos:

$$G_M(s) = \frac{W_m(s)}{V_t(s)} = \frac{2,14 \cdot 10^{-2}}{2,1486 \cdot 10^{-2} \cdot 2,14 \cdot 10^{-2} + (0,5 \cdot 65,65 \cdot 10^{-7}) \cdot s + (65,65 \cdot 10^{-7} \cdot 65 \cdot 10^{-6}) \cdot s^2}$$

$$G_M(s) = \frac{W_m(s)}{V_t(s)} = \frac{0,0214}{4,2672 \cdot 10^{-10} \cdot s^2 + 3,2825 \cdot 10^{-6} \cdot s + 4,5980 \cdot 10^{-4}}$$

$$G_M(s) = \frac{5,0149 \cdot 10^7}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6} = \frac{5,0149 \cdot 10^7}{(s + 7,5496 \cdot 10^3) \cdot (s + 1,4272 \cdot 10^2)} \quad (2.26)$$

A função de transferência acima possui dois pólos reais, distintos e negativos, indicando, portanto que o sistema é estável em malha aberta. Os pólos e constantes de tempo da função de transferência acima são dados por:

$$P_{1M}=-7549,6 \text{ e } P_{2M}=-142,72$$

$$\tau_{1M}=1,3246 \cdot 10^{-4} \text{ e } \tau_{2M}=7,0065 \cdot 10^{-3}.$$

O pólo  $P_{2M}$  é chamado pólo dominante uma vez que é o mais próximo do semiplano da direita e a constante de  $\tau_{2M}$  associada a este pólo também é chamada de dominante.

Para a variação da velocidade da MCC em relação à variação do torque da carga teremos:

$$G_L(s) = \frac{W_m(s)}{T_c(s)} = \frac{- (0,5 + s \cdot 65 \cdot 10^{-6})}{2,1486 \cdot 10^{-2} \cdot 2,14 \cdot 10^{-2} + (0,5 \cdot 65,65 \cdot 10^{-7}) \cdot s + (65,65 \cdot 10^{-7} \cdot 65 \cdot 10^{-6}) \cdot s^2}$$

$$G_L(s) = \frac{W_m(s)}{T_c(s)} = \frac{- (1,523 \cdot 10^5 \cdot s + 1,172 \cdot 10^9)}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6} \quad (2.27)$$

Para o medidor teremos:

$$G_{MM}(s) = \frac{V_m(s)}{W_m(s)} = \frac{41,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3}{[(20 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^3 + 260) + s \cdot 7000 \cdot 10^{-6}]} = \frac{411}{30260 + 0,007 \cdot s} \quad (2.28)$$

$$G_{MM}(s) = \frac{V_m(s)}{W_m(s)} = \frac{5,8714 \cdot 10^4}{s + 4,3229 \cdot 10^6} \quad (2.29)$$

Verificamos que a função de transferência acima possui um pólo em  $p=-4,3229 \cdot 10^6$  e constante de tempo  $\tau_{MM}=2,3 \cdot 10^{-7}$ .

Da expressão acima podemos deduzir ainda o ganho do medidor que será dado por:

$$K_{MM}=0,013582 \quad (2.30)$$

A função de transferência em malha aberta do servossistema será dada por:

$$G_{ma}(s) = G_{AC}(s) \cdot G_M(s) = 12 \cdot \frac{5,0149 \cdot 10^7}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6} \quad (2.31)$$

$$G_{ma}(s) = \frac{6,01788 \cdot 10^8}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6} \quad (2.32)$$

Comparando esta equação com a equação canônica de um sistema de segunda ordem mostrada abaixo teremos:

$$G_{ma}(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 1,078 \cdot 10^6 \Rightarrow \omega_n = 1,0383 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \\ 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 7,6924 \cdot 10^3 \Rightarrow \xi = 3,7052 \\ K \cdot \omega_n^2 = 6,01788 \cdot 10^8 \Rightarrow K = 558,21 \end{cases}$$

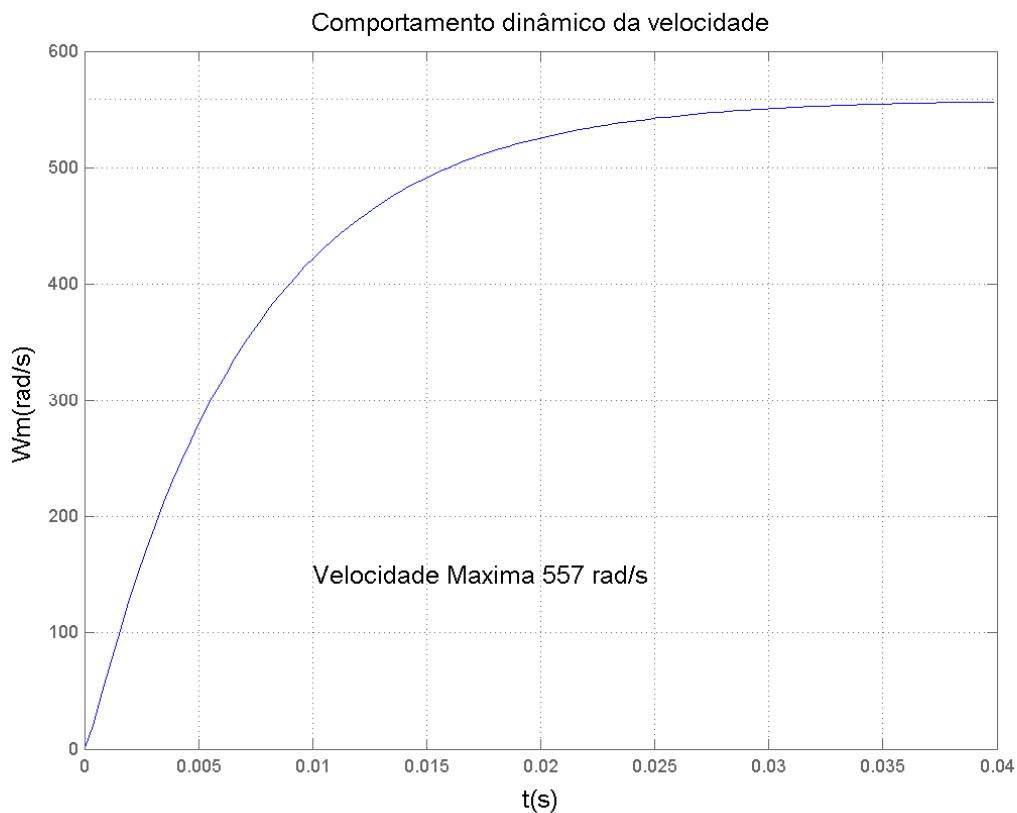
Onde  $\omega_n$  é a freqüência natural não amortecida e  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento.

Como  $\xi > 1$  a função de transferência em malha aberta possuirá dois pólos reais, distintos, negativos e será superamortecido (OGATA, 1998).

#### 2.4.2. Resultado das Simulações

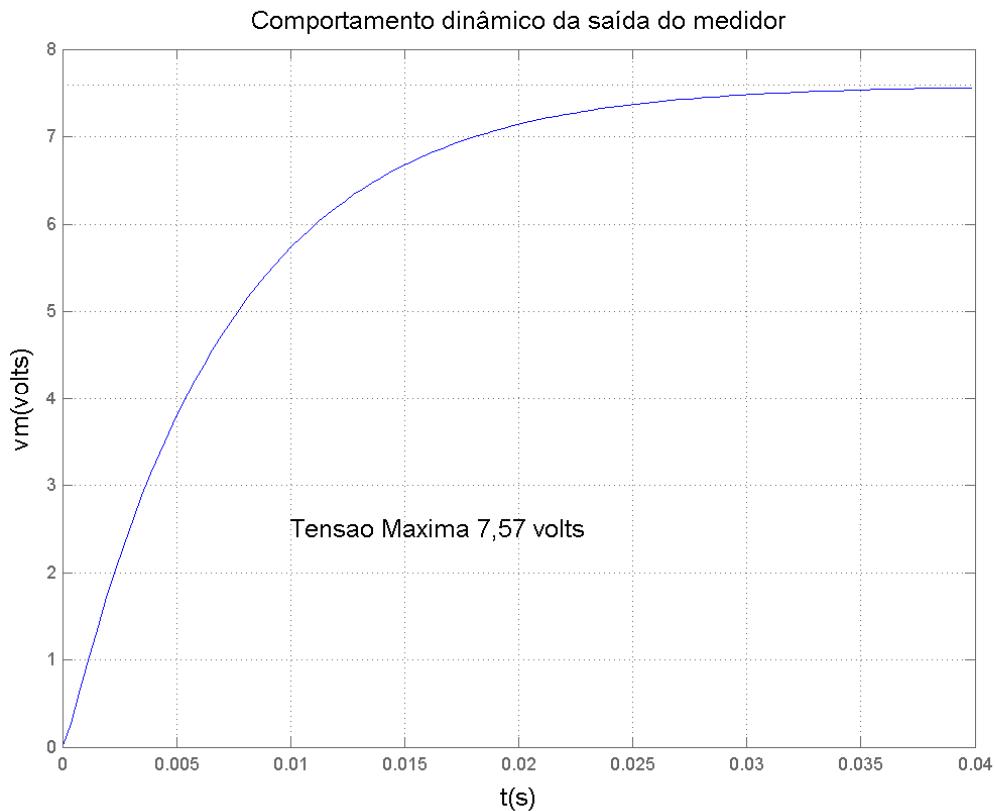
O gráfico da Figura 2.14 ilustra o comportamento dinâmico da velocidade do motor obtido por simulação.

Verificamos que ao aplicarmos um degrau unitário na entrada obtivemos uma velocidade total de 557 rad/s, valor muito próximo do valor esperado (555 rad/s).



**Figura 2.14 – Comportamento dinâmico da velocidade**

A diferença encontrada de 2 rad/s, aproximadamente 0,36%, pode ser explicada pelo fato de não havermos considerado em nosso modelo as perdas geradas pelo torque de fricção e pelo atrito viscoso dos rolamentos do rotor. O formato da curva encontrado também confirma o superamortecimento do sistema. A Figura 2.15 ilustra o comportamento dinâmico da tensão de saída do circuito divisor.



**Figura 2.15 – Comportamento dinâmico da saída do medidor**

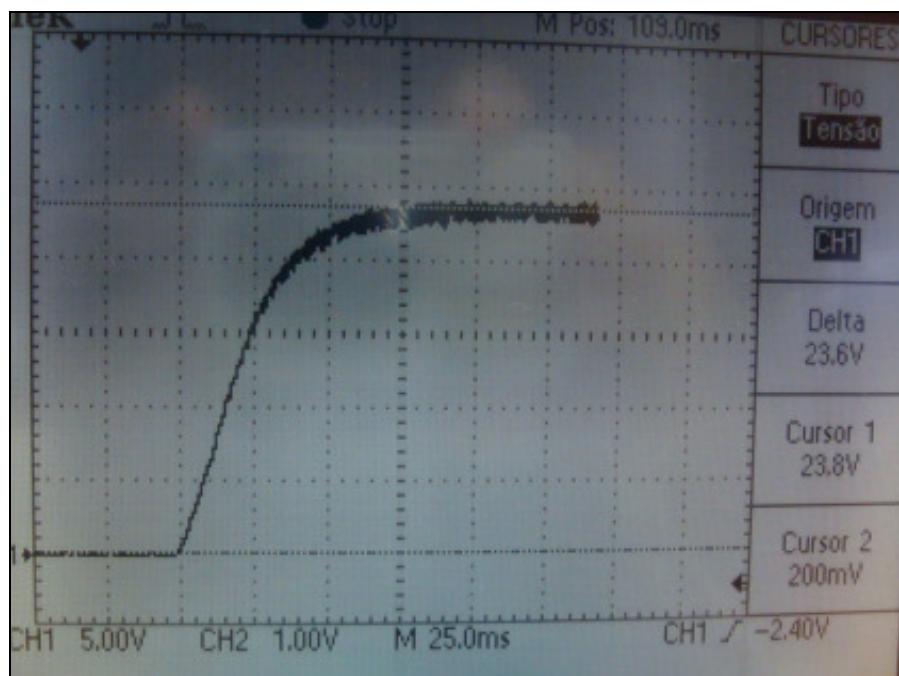
Novamente verificamos que a diferença entre o valor previsto e o obtido através das simulações é bastante pequena, aproximadamente 0,4%, e ocorre em função das aproximações realizadas em nossos modelos.

## ***2.5. Validação do modelo***

Para verificar a eficiência da modelagem matemática foram efetuados ensaios práticos com o motor, acionando-o diretamente com uma fonte de alimentação.

A Figura 2.16 mostra a forma de onda obtida por osciloscópio quando aplicamos 12 V na entrada e medimos a tensão de saída no tacogerador. Notamos que a estabilização em torno de 23,6 V ocorre aproximadamente após 0,08 s. Embora o tempo de acomodação seja maior que o obtido na Figura 2.15, como o tempo de resposta é

muito reduzido, a diferença não é significativa. Por outro lado, a tensão de saída mais elevada confirma a necessidade de utilizarmos um divisor resistivo na saída do tacogerador.

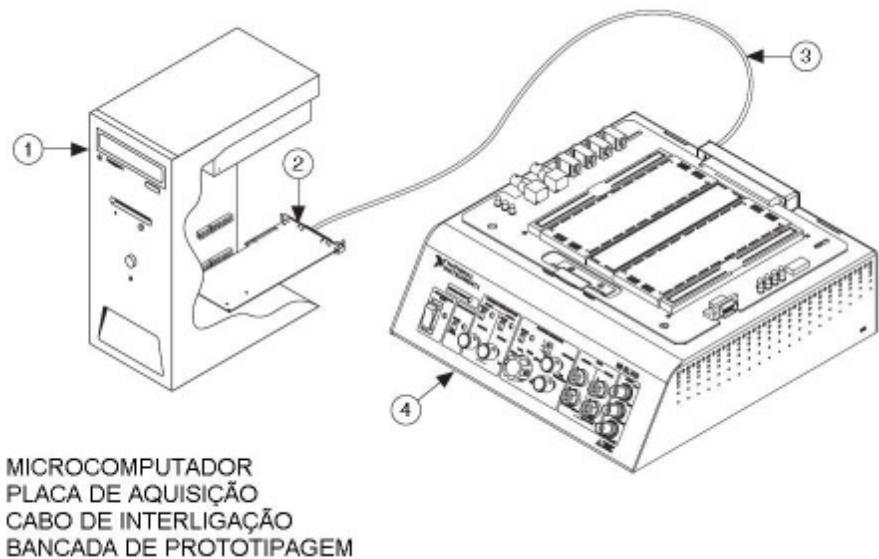


**Figura 2.16 – Comportamento dinâmico da saída do medidor – Osciloscópio**

## 2.6. Kit de aquisição de dados

Para o desenvolvimento do controle por computador utilizamos o kit de desenvolvimento educacional da National Instruments (ELVIS<sup>®</sup>) e a suíte de aplicativos para medição, instrumentação e controle LabVIEW<sup>®</sup>, também da National Instruments na versão 8.2.

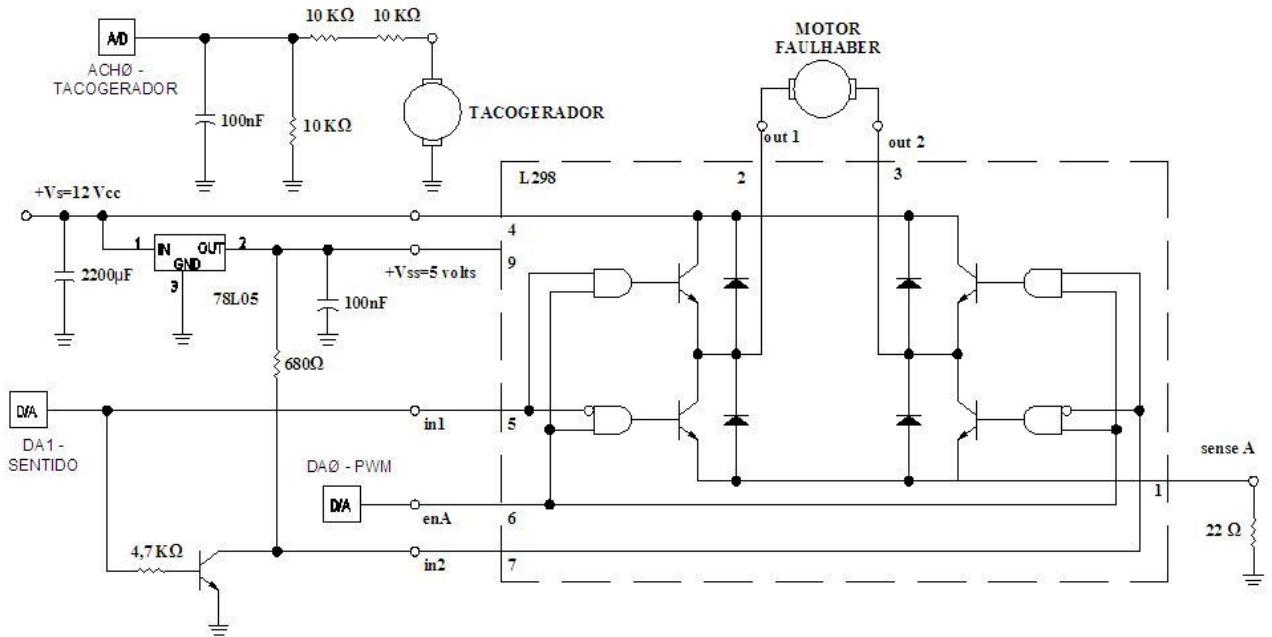
O Kit ELVIS<sup>®</sup> (*Educational Laboratory Virtual Instrumentation Suite*), ilustrado na Figura 2.17 é um ambiente de desenvolvimento composto de uma placa de aquisição de dados PCI-6251 para montagem em microcomputador, uma bancada de testes com fontes de alimentação, geradores de funções, gerador de formas de onda arbitrárias, osciloscópio, multímetro digital e uma placa para prototipagem (*protoboard*) integrada à bancada de testes.



**Figura 2.17 - Kit ELVIS®**

A placa de aquisição utilizada possui 16 entradas e 2 saídas analógicas com resolução de 16 bits, e faixa de operação de 10 volts.

O circuito da Figura 2.18 foi desenvolvido para efetuar a amplificação do sinal e o condicionamento do sinal produzido pelo tacogerador. Na amplificação utilizamos o circuito integrado L-298 que permite desenvolver a conversão CC-CC em ponte completa, sendo acionado por sinal PWM produzido no LabVIEW®. Utilizamos um regulador de tensão (78L05) para provermos a alimentação necessária ao L-298. Um transistor bipolar foi utilizado para que pudéssemos realizar o acionamento das portas in1 e in2, responsáveis pelo sentido de rotação do motor, sempre com valores opostos uma vez que dispúnhamos de apenas uma saída da placa de aquisição para tal.



**Figura 2.18 – Circuito de acionamento do servomotor e condicionamento do sinal do tacogerador**

Para fazer os primeiros testes do sistema de aquisição de dados, ainda sem utilizar o circuito de amplificação, mas utilizando apenas o divisor resistivo e o conversor A/D do ELVIS® efetuamos o acionamento do motor diretamente por tensão de +12 V, sendo obtido no LabVIEW® a forma de onda da Figura 2.19. Observamos a similaridade entre a Figura 2.15 e Figura 2.19, novamente validando o modelo matemático obtido.

Dando continuidade, efetuamos um ensaio completo em malha aberta, neste caso trabalhando com todo o circuito da Figura 2.18, gerador PWM desenvolvido computacionalmente como na Figura 2.20 além de conversores A/D e D/A. Na conversão foram produzidos os seguintes sinais: PWM para o servomotor e sinal de saída que define o sentido de rotação do motor, conforme pode ser visto no circuito da Figura 2.18. O programa completo produzido no LabVIEW® para a aquisição está ilustrado no Anexo 1.



Figura 2.19 – Comportamento dinâmico da saída do medidor – Aquisição

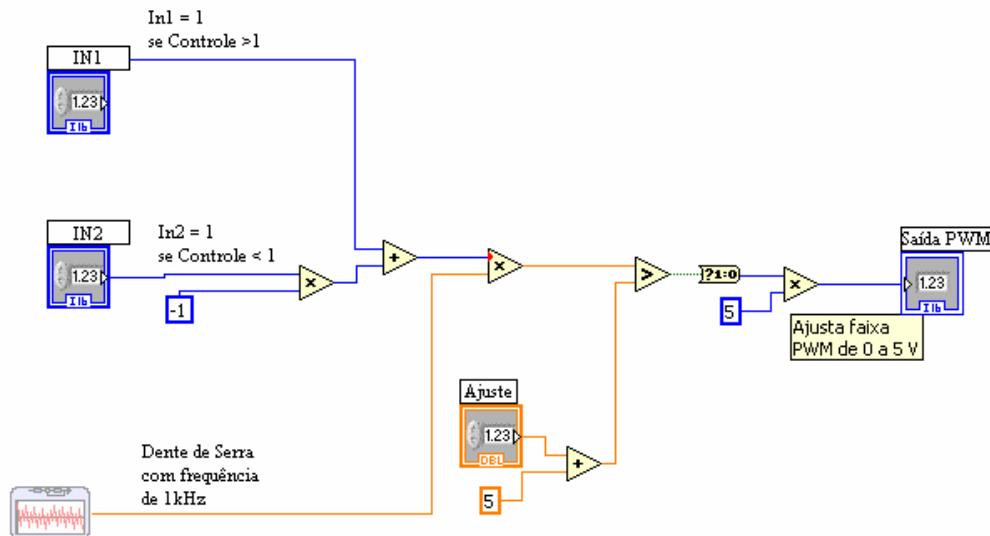
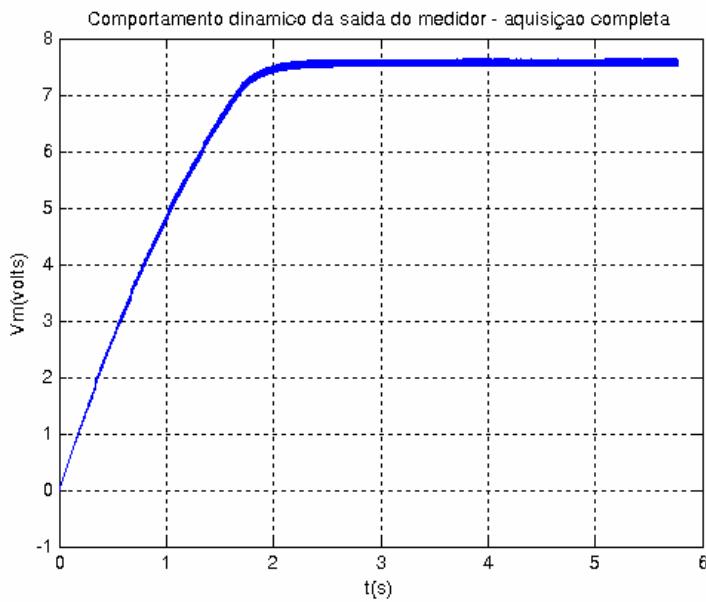


Figura 2.20 - Detalhe do programa de geração do sinal PWM

A Figura 2.21 ilustra a resposta transitória obtida aplicando um degrau de 7 V, suficiente para produzir uma tensão nominal no servomotor (12 V).



**Figura 2.21 - Comportamento dinâmico da saída do medidor – aquisição completa**

Observamos pela resposta obtida que o sistema torna-se muito mais lento do que anteriormente obtido, conforme Figura 2.19. Os principais motivos para estas alterações são:

- atraso de resposta considerável no sistema de aquisição de dados durante a conversão D/A utilizando dois canais de saída (PWM e sentido de direção);
- atraso de resposta na geração do sinal PWM (Figura 2.20);
- tempo morto inserido propositadamente no programa para evitar curto-circuito no circuito amplificador quando houver inversão no sentido de rotação; para explicar isto basta verificar no circuito da Figura 2.9 que o sentido de rotação é definido pela escolha do par de transistores em condução, ou seja, transistores  $Q_2$  e  $Q_3$  ou transistores  $Q_1$  e  $Q_4$ , que funcionam como chave; por exemplo, caso  $Q_2$  e  $Q_3$  sejam acionados antes que  $Q_1$  e  $Q_4$  sejam totalmente abertos ocorrerá o curto-circuito; o tempo morto inserido garante que todos os transistores sejam desacionados durante um tempo suficiente toda vez que desejarmos inverter o sentido de rotação.

Para introduzir no modelo estes efeitos, consideramos no diagrama de blocos da Figura 2.13 uma componente referente à componente de atraso do sistema proporcionado pela aquisição de dados. O modelo de representação do sistema resultante está ilustrado na Figura 2.22 e inclui a componente de aquisição dada por:

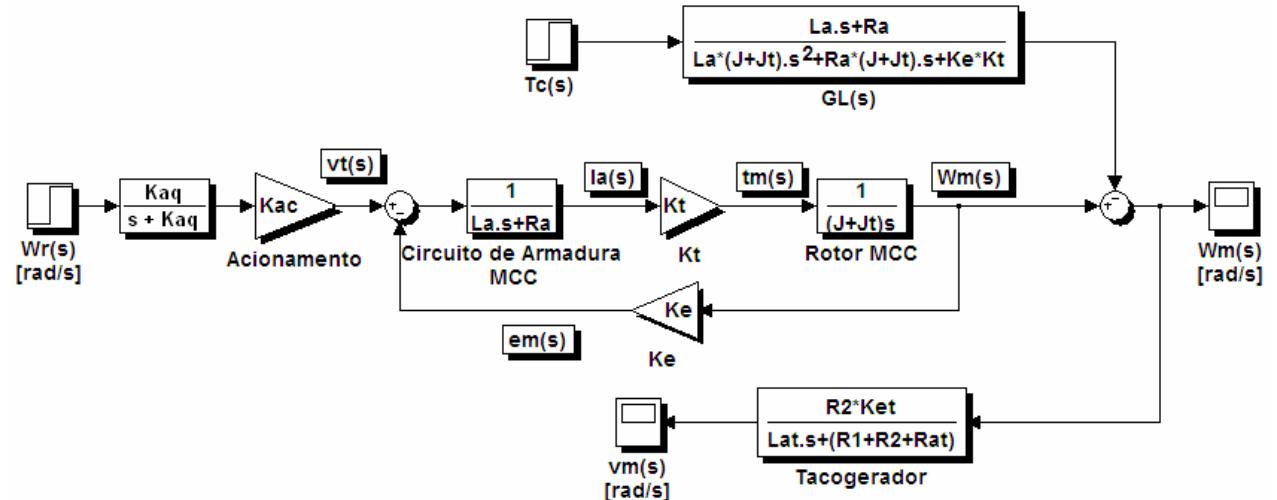
$$G_{AQ}(s) = \frac{K_{AQ}}{s + K_{AO}} \quad (2.33)$$

Onde  $K_{AQ}$  foi determinado experimentalmente e vale  $K_{AQ} = 1,2 \text{ s/rad}$ .

Os pólos e constantes de tempo da função de transferência acima são dados por:

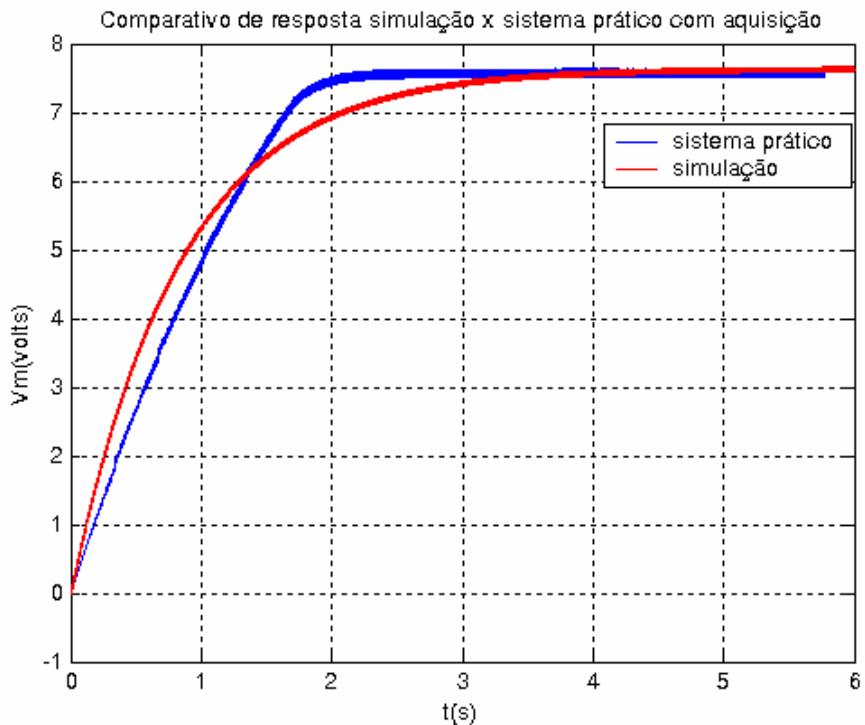
$$P_{AQ}=-1,2$$

$$\tau_{AQ}=8,3333 \cdot 10^{-1} \text{ [s]}$$



**Figura 2.22 - Diagrama de Blocos em malha aberta com sistema de aquisição**

Para fazer a validação do sistema resultante da Figura 2.22 com aquisição de dados foi efetuada a análise comparativa entre o sinal prático e o obtido por simulação, ambos sem considerar a introdução de carga. Os resultados são ilustrados na Figura 2.24 onde pode ser observada a similaridade entre as respostas obtidas.



**Figura 2.23 - Comparativo de resposta simulação x sistema prático com aquisição**

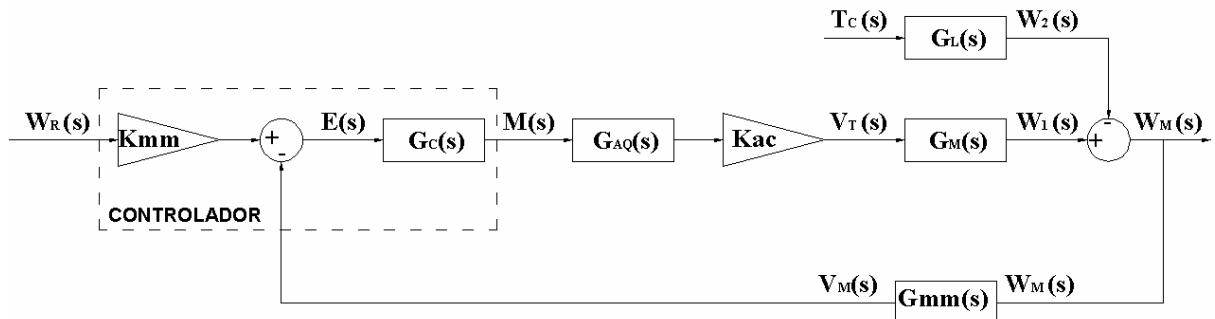
## **2.7. Controle por realimentação**

A realimentação é atualmente a técnica mais utilizada para implementação do controle de sistemas e processos. A compensação via malha de realimentação é conseguida medindo o valor da variável que se deseja controlar e comparando-a a um valor desejado. A diferença entre ambos é utilizada como sinal para o algoritmo de controle o qual é o responsável por manter o valor da variável controlada o mais próximo possível do valor desejado.

Uma das grandes vantagens deste tipo de malha é que não é preciso medir as perturbações no sistema, o que torna esta técnica bastante atraente, uma vez que a única instrumentação necessária, além do controlador e da válvula ou circuito de acionamento, é um medidor para a variável de controle.

Podemos verificar que para este tipo de malha primeiro ocorre o desvio para só então ocorrer a correção, porém esta ocorre independente da fonte do desvio (variação da referência ou perturbações na carga).

De posse das funções de transferência de todos os dispositivos do servossistema, podemos elaborar o diagrama de blocos da Figura 2.24, representando uma malha de controle por realimentação onde o valor da velocidade  $\omega_m(s)$  da saída é comparado a um valor de referência  $\omega_R(s)$  e o controlador  $G_C(s)$  atua em função dos desvios em relação à referência.



**Figura 2.24 - Diagrama de blocos em malha fechada**

Na Figura 2.24  $G_M(s)$  e  $G_L(s)$  são respectivamente as funções de transferência do sistema para variações no valor de referência (2.26) e na carga (2.27),  $G_{MM}(s)$  é a função de transferência do medidor (2.29),  $K_{AC}$  é o ganho do sistema de acionamento (2.25),  $G_{AQ}(s)$  é a função de transferência do sistema de aquisição de dados (2.33) e  $K_{MM}$  é o ganho do medidor utilizado no sinal de referência (2.30), de forma a normalizar a velocidade de referência  $\omega_R(s)$ .

As avaliações do desempenho deste tipo de malha são realizadas analisando o comportamento da saída em função das variações na carga e no valor de referência. Para tal é utilizada a função de transferência em malha fechada.

## 2.8. Função de transferência em malha fechada

Analizando o diagrama de blocos da Figura 2.24 podemos determinar a função de transferência em malha fechada do sistema.

Considerando nulas as variações na carga, podemos escrever a função de transferência que relaciona a rotação do motor com as variações do valor de referência:

$$W_1(s) = G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = W_R(s) \cdot K_{MM} - W_1(s) \cdot G_{MM}(s)$$

$$W_1(s) = G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot [W_R(s) \cdot K_{MM} - W_1(s) \cdot G_{MM}(s)]$$

$$W_1(s) + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot W_1(s) \cdot G_{MM}(s) = G_C(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot W_R(s) \cdot K_{MM}$$

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = \frac{K_{MM} \cdot G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s)}{1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)} \quad (2.34)$$

Considerando o valor de referência constante, teremos a função de transferência que relaciona a velocidade do motor com variações no torque da carga:

$$\frac{W_2(s)}{T_c(s)} = \frac{G_L(s)}{1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)} \quad (2.35)$$

Podemos verificar que os denominadores das funções de transferência acima são iguais. Esse denominador comum é chamado de “equação característica”.

Como o sistema é linear, utilizando o Princípio da Superposição, podemos utilizar a expressão (2.36) para calcular a variação da velocidade do motor para mudanças simultâneas no valor de referência e alterações da carga.

$$W_m(s) = \frac{K_{MM} \cdot G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot W_R(s)}{1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)} - \dots$$

$$\dots \frac{G_L(s) \cdot T_c(s)}{1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)}$$
(2.36)

## 2.9. Análise de estabilidade

O ganho limite do controlador é definido como o maior valor que o ganho proporcional pode assumir, sem considerar as ações integrais e derivativas, para que o sistema permaneça no limiar da estabilidade, levando-o a oscilar continuamente quando submetido a uma entrada em degrau durante um ensaio em malha fechada. O período das oscilações, nesta condição, é chamado de período limite ou crítico.

De posse do modelo aproximado do sistema, calcularemos o valor do ganho limite aplicando o critério de estabilidade de Routh e aplicando a técnica da substituição direta ( $s=j\omega$ ) obteremos o valor do período limite.

A função de transferência em malha fechada do sistema para variações no valor de referência é dada pela equação (2.34). Considerando apenas o modo proporcional do controlador e substituindo as funções de transferência dos dispositivos do sistema teremos:

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = \frac{0,013582 \cdot K_c \cdot \frac{1,2}{s+1,2} \cdot 12 \cdot \frac{5,0149 \cdot 10^7}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6}}{1 + K_c \cdot \frac{1,2}{s+1,2} \cdot 12 \cdot \frac{5,0149 \cdot 10^7}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6} \cdot \frac{5,8714 \cdot 10^4}{s + 4,3229 \cdot 10^6}}$$

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = \frac{\frac{9,8082 \cdot 10^6 \cdot K_c}{(s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6) \cdot (s + 1,2)}}{1 + \frac{4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_c}{(s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6) \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6) \cdot (s + 1,2)}}$$

$$\frac{W_1(s)}{W_r(s)} = \frac{9,8082 \cdot 10^6 \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6) \cdot K_c}{(s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6) \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6) \cdot (s + 1,2) + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_c}$$

$$\frac{W_1(s)}{W_r(s)} = \frac{9,8082 \cdot 10^6 \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6) \cdot K_c}{s^4 + 4,3306 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + 4,7 \cdot 10^{12} \cdot s + 5,5921 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_c}$$

O denominador da equação acima representa a equação característica da função de transferência em malha fechada.

$$A(s) = s^4 + 4,3306 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + 4,7 \cdot 10^{12} \cdot s + 5,5921 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_c \quad (2.37)$$

Podemos verificar que a equação acima possui o seguinte formato:

$$A(s) = a_0 \cdot s^4 + a_1 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s + a_4 = 0$$

Comparando a equação característica com a equação acima teremos os seguintes valores para os coeficientes:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 4,3306 \cdot 10^6 \\ a_2 = 3,326 \cdot 10^{10} \\ a_3 = 4,7 \cdot 10^{12} \\ a_4 = 5,5921 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_c \end{cases}$$

A seguir preparamos a tabela de coeficientes de Routh para determinarmos o maior ganho possível (ganho crítico) que manterá o sistema oscilando continuamente.

O critério de Routh afirma que o número de raízes da equação característica com partes reais positivas, o que tornaria o sistema instável, é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna.

Já temos os valores de  $a_0$  e  $a_1$ , que são positivos, restando calcular  $b_1$ ,  $c_2$  e  $d_1$ , que deverão ser positivos também. Calculando  $b_1$  e  $b_2$  teremos:

**Tabela 2.4 - Arranjo tabular de Routh**

$S^4$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6 = 0$
$S^3$	$a_1$	$a_3$	$a_5 = 0$	$a_7 = 0$
$S^2$	$b_1 = \frac{(a_1 \cdot a_2) - (a_0 \cdot a_3)}{a_1}$	$b_2 = \frac{(a_1 \cdot a_4) - (a_0 \cdot a_5)}{a_1} = a_4$	$b_3 = 0$	0
$S$	$c_1 = \frac{(b_1 \cdot a_3) - (a_1 \cdot b_2)}{b_1}$	$c_2 = 0$	$c_3 = 0$	0
$S^0$	$d_1 = \frac{(c_1 \cdot b_2) - (b_1 \cdot c_2)}{c_1} = b_2$	$d_2 = 0$	0	0
$S^{-1}$	$e_1 = \frac{(d_1 \cdot c_2) - (c_1 \cdot d_2)}{d_1} = 0$	0	0	0

$$b_1 = \frac{(4,3306 \cdot 10^6 \cdot 3,326 \cdot 10^{10}) - (1 \cdot 4,7 \cdot 10^{12})}{4,3306 \cdot 10^6} = 3,3259 \cdot 10^{10}$$

$$b_2 = 5,5921 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_c$$

$$c_1 = \frac{(3,3259 \cdot 10^{10} \cdot 4,7 \cdot 10^{12}) - (4,3306 \cdot 10^6 \cdot (5,5921 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_c))}{3,3259 \cdot 10^{10}}$$

$$c_1 = \frac{1,5629 \cdot 10^{23} - 1,8362 \cdot 10^{20} \cdot K_c}{3,3253 \cdot 10^{20}} = -0,5522 \cdot K_c + 470,0027 > 0 \Rightarrow K_c < 851,1458$$

$$K_c < 851,1458 \quad (2.38)$$

Podemos verificar então que para o ganho  $K_c = K_{cu} = 851,1458$  o sistema estará no limite da estabilidade, mantendo oscilações contínuas.

Substituindo o valor do ganho crítico na equação característica (2.37) e a identidade  $s = j\omega$  podemos então calcular o período crítico:

$$A(j \cdot \omega) = (j \cdot \omega)^4 + (j \cdot \omega)^3 \cdot 4,3306 \cdot 10^6 + (j \cdot \omega)^2 \cdot 3,326 \cdot 10^{10} + (j \cdot \omega) \cdot 4,7 \cdot 10^{12} + 3,6094 \cdot 10^{16} = 0$$

$$A(j \cdot \omega) = \omega^4 - j \cdot \omega^3 \cdot 4,3306 \cdot 10^6 - \omega^2 \cdot 3,326 \cdot 10^{10} + j \cdot \omega \cdot 4,7 \cdot 10^{12} + 3,6094 \cdot 10^{16} = 0$$

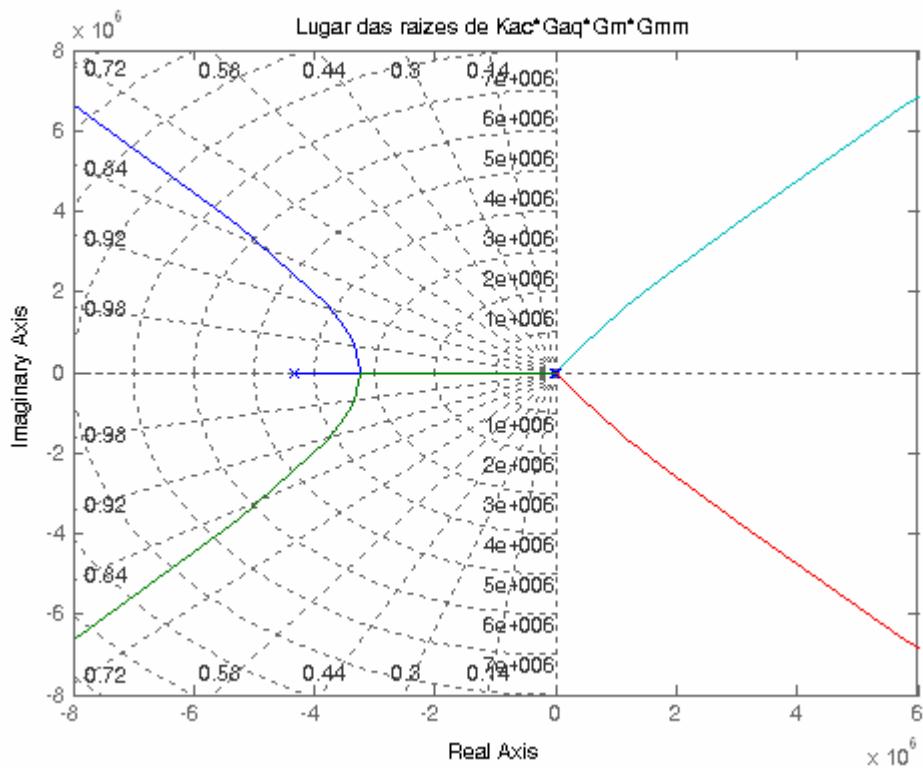
$$A(j \cdot \omega) = (\omega^4 - \omega^2 \cdot 3,326 \cdot 10^{10} + 3,6094 \cdot 10^{16}) + j \cdot (-\omega^3 \cdot 4,3306 \cdot 10^6 + \omega \cdot 4,7 \cdot 10^{12}) = 0 \quad (2.39)$$

Para que a identidade acima seja verdadeira tanto a parte real quanto a parte imaginária devem ser nulas então:

$$\begin{cases} \text{Im: } -4,3306 \cdot 10^6 \omega^3 + 4,7 \cdot 10^{12} \omega \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm 1,04167 \cdot 10^3 \\ \text{Re: } \omega^4 - 3,326 \cdot 10^{10} \omega^2 + 3,6089 \cdot 10^{16} = 0 \Rightarrow \omega_{4,5} = \pm 1,8237 \cdot 10^5, \omega_{6,7} = \pm 1,04168 \cdot 10^3 \end{cases} \quad (2.40)$$

Dentre as soluções obtidas não é possível definir qual é o período crítico diretamente. Para isto obtivemos o lugar das raízes do sistema, conforme Figura 2.25. Este tipo de gráfico mostra a variação da posição dos pólos e zeros, no plano complexo s, de um sistema linear em função da variação do ganho do controlador entre zero e infinito. Sabemos que pólos do lado direito do plano complexo levam o sistema à instabilidade e que pólos sobre o eixo imaginário levam o sistema a oscilações contínuas. Para que o sistema seja estável os pólos devem estar no semiplano esquerdo.

As linhas que partem da origem dos eixos representam locais do plano complexo s onde o coeficiente de amortecimento  $\varphi$  é constante e as linhas concêntricas em relação à origem representam os locais do plano complexo s onde a freqüência natural não amortecida  $\omega_n$  é constante. Podemos então, ao analisarmos um gráfico do lugar das raízes determinar, para cada ponto do lugar das raízes, o valor do ganho, as raízes associadas a este ganho, a freqüência natural não-amortecida, o coeficiente de amortecimento e ainda o máximo valor de sobre-sinal associado.



**Figura 2.25 - Lugar das Raízes do sistema em tempo contínuo**

As intersecções entre o gráfico do lugar das raízes e o eixo imaginário representam as raízes do sistema quando o ganho é crítico, ou seja, se investigarmos estes pontos do gráfico acima podemos determiná-lo e adicionalmente obter a freqüência crítica. Estes pontos são mostrados na Figura 2.26, que corresponde a uma ampliação da posição onde o gráfico cruza o eixo imaginário, onde podemos então confirmar os valores calculados.

A Figura 2.27 mostra os resultados de uma simulação utilizando o ganho crítico calculado acima. Nela podemos verificar a coerência dos valores calculados, através dos pontos do gráfico e da forma de onda.

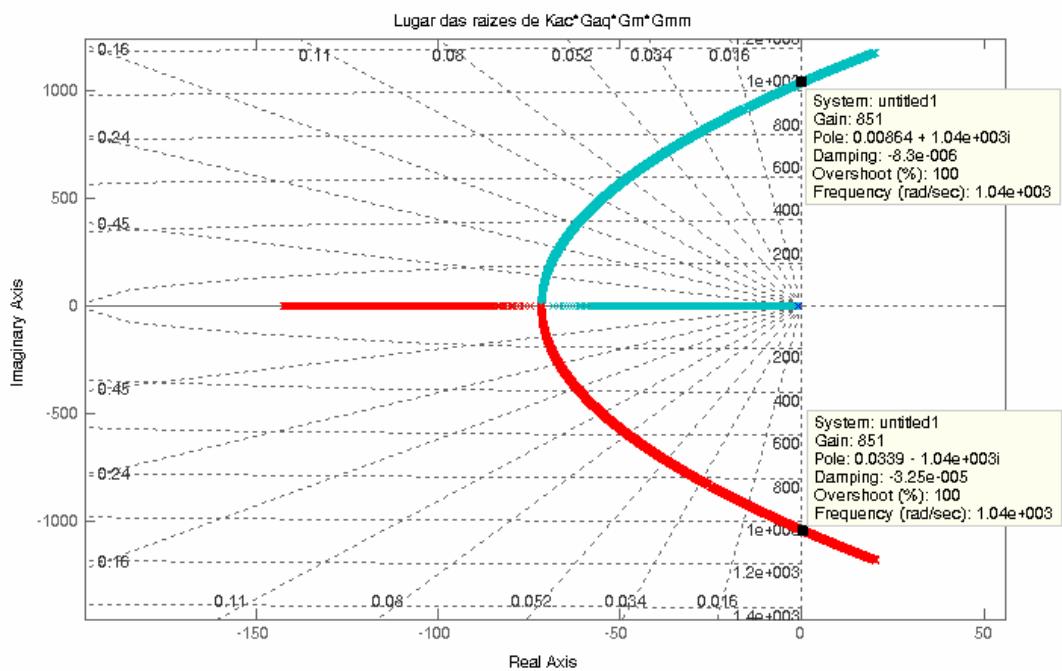


Figura 2.26 - Ampliação do lugar das raízes

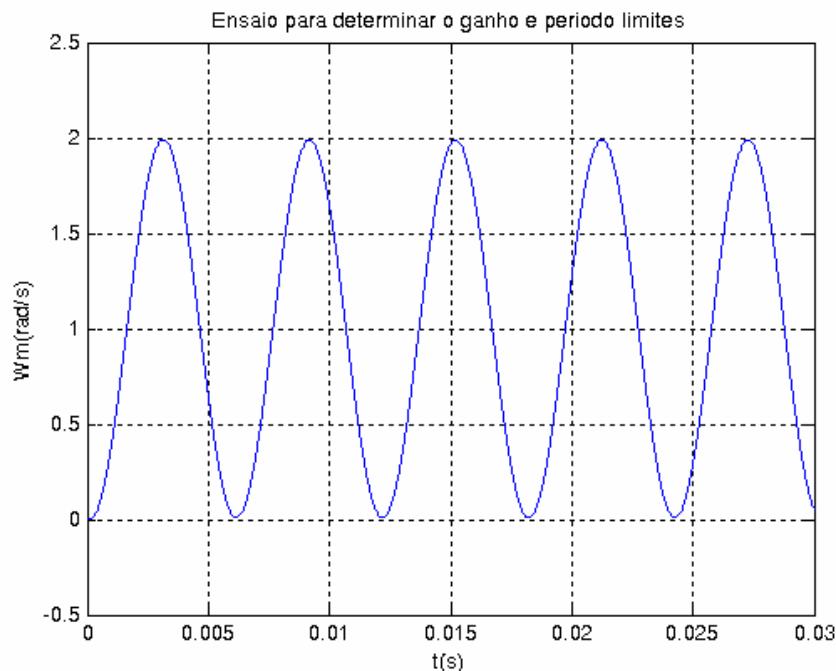


Figura 2.27 - Simulação para confirmar o ganho e período críticos

Verificamos que o sistema passou a oscilar continuamente, indicando que o ganho crítico calculado levou o sistema ao limite de estabilidade (deslocando os pólos do sistema em direção ao semiplano da direita e colocando-os sobre o eixo real). Analisando o lugar das raízes da Figura 2.26 e a forma de onda da Figura 2.27 observamos que a frequência crítica calculada em (2.40) equivale a:  $\omega_2 = 1,0418 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ .

O período das oscilações contínuas pode ser calculado conforme abaixo e confirmado através dos pontos indicados no gráfico da Figura 2.27.

$$P_u = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \Rightarrow P_u = 6,0311 \cdot 10^{-3} \text{ [s]} \quad (2.41)$$

### **3. CONTROLADORES PID ANALÓGICOS**

Nesta etapa do trabalho pretendemos implementar uma malha de controle por realimentação associada a um controlador PID. Serão aplicadas diversas técnicas de sintonia e projeto para ajuste do controlador com o objetivo de compará-las e estabelecer os controladores mais eficientes após a sintonia ou projeto.

Os controladores PID são adequados para o controle de sistemas de primeira e segunda ordem; para processos mais complexos (afetados por ruídos, altos valores de tempo morto, processos de ordens superiores, variações freqüentes na carga, etc.) é necessário o uso de técnicas mais avançadas de controle dentre as quais as redes neurais, a lógica nebulosa ou fuzzy, os controladores auto-ajustáveis, etc.

A principal vantagem do controlador PID sobre os demais é o fato de que sua teoria é baseada na análise da resposta de um sistema. Não é necessário o conhecimento do processo ou do sistema a ser controlado, mas apenas do seu comportamento transitório, para estabelecer um controlador eficiente.

#### ***3.1. O algoritmo do Controlador PID analógico***

O controlador PID é o dispositivo de uma malha de controle responsável por manter a variável controlada em seu valor de referência. Para tal ele recebe as informações relativas ao valor desta variável, através de uma malha de realimentação, provenientes de um medidor, compara-as a um valor de referência e envia para sua saída um sinal

de controle  $m(t)$  que é função do desvio  $e(t)$  entre a variável controlada e o valor de referência.

A equação, ou algoritmo, que relaciona o sinal de controle ao valor do desvio possui três componentes básicos em sua forma de atuação que serão descritos a seguir.

A atuação proporcional onde a amplitude do valor de saída  $m(t)$  é proporcional à amplitude do desvio  $e(t)$ . A constante de proporcionalidade é o ganho proporcional  $K_c$  do controlador.

A atuação integral onde a amplitude do valor de saída  $m(t)$  é proporcional à integral do sinal do desvio. A constante de proporcionalidade é o tempo integral  $T_i$ .

A atuação derivativa onde a amplitude do valor de saída  $m(t)$  é proporcional à derivada do sinal do desvio. A constante de proporcionalidade é o tempo derivativo  $T_d$ .

Na prática, os controladores mais comuns usam combinações dos modos acima. Temos os controladores P, PI, PD e PID. O modo derivativo e o modo integral sempre são utilizados em combinação com o modo proporcional. O modo proporcional puro só é utilizado em sistemas onde não existe a necessidade de precisão absoluta na resposta (GARCIA, 2001).

### 3.1.1. Modo proporcional

A equação do controlador proporcional no domínio do tempo é dada por:

$$m(t) = K_c \cdot e(t) + \bar{m}$$

Onde  $\bar{m}$  é o valor inicial da saída quando o valor do erro for nulo, chamado de reajuste manual (*manual reset*).

Considerando as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace teremos:

$$M(s) = K_c \cdot E(s) \quad (3.1)$$

Inspecionando a equação (3.1) podemos verificar que para que a saída do controlador  $M(s)$  possua um valor finito e diferente de zero, o valor do erro atuante não pode ser igual a zero. Sempre será necessário um pequeno valor de erro para que o controlador envie um sinal para sua saída, ou seja, quando o erro tende a zero a saída do controlador também. Esse valor é chamado de erro em regime permanente, ou erro de “*offset*”.

A única forma de eliminar o erro permanente é alterar manualmente o valor da saída do controlador, através da adição ao algoritmo do valor do reajuste manual (*manual reset*).

Valores muito altos do ganho diminuem o valor do erro permanente, porém podem levar o sistema à instabilidade ou a respostas muito lentas, uma vez que deslocam os pólos da função de transferência em direção ao semiplano direito do diagrama de pólos e zeros.

### 3.1.2. Modo proporcional-integral

Em geral não é utilizado o modo integral puro (GARCIA, 2001), mas em combinações com o modo proporcional (controlador PI) ou com o modo proporcional e derivativo (controlador PID).

O modo proporcional-integral é utilizado quando é necessário eliminar o erro em regime permanente. A saída do controlador neste caso será proporcional ao erro e à integral do erro.

$$m(t) = K_c \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \right) + m_0$$

Onde  $m_0$  é o valor da condição inicial da integral.

Supondo as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace à equação acima teremos:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot \left( 1 + \frac{1}{s \cdot T_i} \right) = K_c \cdot \left( \frac{s \cdot T_i + 1}{s \cdot T_i} \right) \quad (3.2)$$

Onde  $T_i$  é o tempo integral, o qual representa o tempo em que a contribuição da ação integral demorará em igualar à ação proporcional. Este tempo geralmente é dado em segundos ou minutos.

A eliminação do erro em regime permanente é decorrente da adição de um pólo na origem do sistema, porém, também torna a resposta do sistema mais lenta e mais instável.

### 3.1.3. Modo Proporcional-Derivativo

Neste modo temos a ação proporcional combinada com a ação derivativa. O sinal de saída deste tipo de controlador é proporcional ao erro e à taxa de variação do erro:

$$m(t) = K_c \cdot \left( e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) + \bar{m}$$

Supondo as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace à equação acima teremos:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot (1 + sT_d) \quad (3.3)$$

Onde  $T_d$  é o tempo derivativo. Este valor representa o tempo em que a ação proporcional igualará a ação instantânea da componente derivativa.

O modo derivativo nunca é utilizado sozinho, uma vez que só responde nos períodos onde houver variação do erro, ou seja, quando o erro for constante esse modo não afeta a saída do controlador.

Ao acrescentar amortecimento ao sistema, o modo derivativo de atuação melhora a estabilidade, permitindo o uso de ganhos maiores pelo controlador, diminuindo desta forma o erro em regime permanente, sem eliminá-lo.

Um grande inconveniente do modo derivativo é a sua sensibilidade em sistemas ruidosos. Para atenuar esta sensibilidade é necessário limitar o ganho derivativo em altas freqüências incluindo um filtro de primeira ordem no termo derivativo como segue:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot \left( 1 + \frac{s \cdot T_d}{0,1 \cdot T_d \cdot s + 1} \right) \quad (3.4)$$

### 3.1.4. Modo Proporcional-Integral-Derivativo

O controlador PID combina as atuações dos modos proporcional, integral e derivativo. A equação clássica deste controlador é a que pode ser vista abaixo:

$$m(t) = K_c \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) + m_0$$

Supondo as condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace teremos:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (3.5)$$

O algoritmo desenvolvido acima é conhecido como algoritmo clássico. Ele apresenta o mesmo problema que o controlador proporcional-derivativo em relação à sensibilidade a ruídos provocada pelo termo derivativo. Para atenuar esta sensibilidade é necessário

limitar o ganho derivativo em altas freqüências incluindo um filtro de primeira ordem no termo derivativo, como já foi feito anteriormente. O algoritmo para o controlador PID modificado segue abaixo:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot \left( 1 + \frac{1}{s \cdot T_i} + \frac{s \cdot T_d}{0,1 \cdot T_d \cdot s + 1} \right) \quad (3.6)$$

Este algoritmo é conhecido como algoritmo PID com limitação do ganho derivativo.

O ajuste dos parâmetros do controlador é chamado de sintonia. Diversos métodos foram desenvolvidos para realizar a sintonia, baseados em técnicas empíricas e analíticas. Nas próximas seções serão utilizadas algumas dessas técnicas para sintonizar diversos controladores PID para o sistema.

### **3.2. Critérios para avaliação de desempenho**

Para avaliação e comparação dos controladores obtidos será necessário estabelecer critérios de desempenho em regime permanente e transitório. Entre os critérios mais comuns estão os critérios no domínio do tempo, o erro em regime permanente e os critérios integrais de erro.

#### **3.2.1. Critérios de erro integrado**

Existem diversos critérios para comparação entre controladores considerando o erro em regime transitório. Eles são úteis na avaliação porque geram parâmetros numéricos que podem ser facilmente comparados. Dentre esses critérios os mais importantes são o ITAE e o ITSE.

O ITAE – integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo – penaliza mais erros que ocorrem mais tarde do que erros iniciais grandes. A relação para cálculo do ITAE é dada abaixo:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t \cdot |e(t)| dt$$

Percebemos então que controladores que geram erros em regime permanente possuirão índices mais rigorosos do que outros controladores.

O ITSE – integral do erro quadrático multiplicado pelo tempo – penaliza erros que ocorrem mais tarde mais fortemente que os erros dos momentos iniciais do transitório. Além disso, erros muito grandes são penalizados fortemente (GARCIA, 2001).

A relação para cálculo do ITSE é dada abaixo:

$$ITSE = \int_0^{\infty} t \cdot e^2(t) dt$$

### 3.2.2. Erro em regime permanente

O erro em regime permanente é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída, para determinado tipo de sinal de entrada, depois de passado o tempo de estabilização.

O diagrama de blocos da Figura 2.24 representa a malha fechada por realimentação. Iremos obter então as equações que relacionam o erro a variações no calor de referência e perturbações na carga; Com as equações obtidas aplicaremos o Teorema do Valor Final para verificarmos o valor do erro para diversos tipos de controladores.

$$E(s) = W_R(s) \cdot K_{MM} - [W_1(s) - W_2(s)] \cdot G_{MM}(s)$$

$$E(s) = W_R(s) \cdot K_{MM} - G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s) \cdot E(s) + T_C(s) \cdot G_L(s) \cdot G_{MM}(s) \quad (3.7)$$

Supondo as variações na carga nula teremos:

$$E(s) = W_R(s) \cdot K_{MM} - G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = \frac{W_R(s) \cdot K_{MM}}{1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)}$$

Supondo que o valor de referência seja um degrau unitário a equação acima fica:

$$E(s) = \frac{K_{MM}}{[1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)] \cdot s}$$

As funções de transferência do motor, do medidor e do sistema de aquisição de dados possuem os seguintes formatos:

$$G_M(s) = \frac{K_1}{(s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M})}$$

$$G_{MM}(s) = \frac{K_2}{(s + p_{MM})}$$

$$G_{AQ}(s) = \frac{K_{AQ}}{(s + p_{AQ})}$$

Substituindo na equação do erro teremos:

$$E(s) = \frac{K_{MM}}{\left(1 + G_C(s) \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM})}\right) \cdot s} \quad (3.8)$$

A seguir analisaremos para cada tipo de controlador qual será o valor do erro em regime estacionário, considerando como sinal de entrada o degrau unitário.

Substituindo a equação do controlador proporcional na equação (3.8) e aplicando o teorema do valor final teremos:

$$E(s) = \frac{K_{MM}}{\left(1 + K_C \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM})}\right) \cdot s}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_{MM}}{\left(1 + K_C \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM})}\right) \cdot s}$$

$$e_{ss} = \frac{K_{MM}}{\left(1 + K_C \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{p_{AQ} \cdot p_{1M} \cdot p_{2M} \cdot p_{MM}}\right)} = \frac{K_{MM} \cdot p_{AQ} \cdot p_{1M} \cdot p_{2M} \cdot p_{MM}}{p_{AQ} \cdot p_{1M} \cdot p_{2M} \cdot p_{MM} + K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}$$

Verificamos que o controlador proporcional não elimina o erro em regime estacionário, quando o sinal de entrada é o degrau unitário.

Substituindo a equação do controlador PD na equação (3.8) e aplicando o teorema do valor final teremos:

$$E(s) = \frac{K_{MM}}{\left(1 + K_C \cdot (1 + T_d \cdot s) \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM})}\right) \cdot s}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_{MM}}{\left(1 + K_C \cdot (1 + T_d \cdot s) \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM})}\right) \cdot s}$$

$$e_{ss} = \frac{K_{MM}}{\left(1 + \frac{K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{p_{AQ} \cdot p_{1M} \cdot p_{2M} \cdot p_{MM}}\right)} = \frac{K_{MM} \cdot p_{AQ} \cdot p_{1M} \cdot p_{2M} \cdot p_{MM}}{p_{AQ} \cdot p_{1M} \cdot p_{2M} \cdot p_{MM} + K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}$$

O controlador PD apresentou resultado idêntico ao controlador proporcional. Verificamos que a adição do termo derivativo não elimina e tampouco afeta o erro estacionário.

Substituindo a equação do controlador PI na equação (3.8) e aplicando o teorema do valor final teremos:

$$E(s) = \frac{K_{MM}}{\left(1 + K_C \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right) \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM})}\right) \cdot s}$$

$$E(s) = \frac{K_{MM}}{\left(1 + \frac{(T_i \cdot s + 1) \cdot K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s}\right) \cdot s}$$

$$E(s) = \frac{K_{MM} \cdot (s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s}{[(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s + (T_i \cdot s + 1) \cdot K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2] \cdot s}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_{MM} \cdot (s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s}{[(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s + (T_i \cdot s + 1) \cdot K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2] \cdot s}$$

$$e_{ss} = \frac{K_{MM} \cdot (s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot 0}{[(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s + (T_i \cdot s + 1) \cdot K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2]} = 0$$

Verificamos que a adição do termo integral eliminou o erro em regime permanente.

Substituindo a equação do controlador PID na equação (3.8) e aplicando o teorema do valor final teremos:

$$E(s) = \frac{K_{MM}}{\left(1 + K_C \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) \cdot \frac{K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2}{(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM})}\right) \cdot s}$$

$$E(s) = \frac{K_{MM} \cdot (s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s}{[(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s + (T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1) \cdot K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2] \cdot s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_{MM} \cdot (s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s}{[(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s + (T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1) \cdot K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2] \cdot s}$$

$$e_{ss} = \frac{K_{MM} \cdot (s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot 0}{[(s + p_{AQ}) \cdot (s + p_{1M}) \cdot (s + p_{2M}) \cdot (s + p_{MM}) \cdot T_i \cdot s + (T_d \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1) \cdot K_C \cdot K_{AQ} \cdot K_{AC} \cdot K_1 \cdot K_2]} = 0$$

O controlador PID também elimina o erro em regime permanente devido a adição do integrador (pólo na origem do plano complexo s).

### 3.2.3. Critérios no domínio do tempo

Os critérios mais usuais, no domínio do tempo, podem ser verificados na Figura 3.1, onde, foi utilizado como sinal de teste um degrau unitário. São eles:

Máximo valor de sobre-sinal (*Maximum overshoot*) -  $m_p$  - é a relação entre o valor máximo da saída (ao longo do tempo) e o valor da saída em regime, pode ser calculado por:

$$m_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

O instante de pico (*Peak time*) -  $t_p$  - é o tempo necessário para a resposta atingir o seu valor máximo.

O tempo de subida (*Rise time*) -  $t_r$  - é o tempo necessário para que a resposta do sistema varie entre 10% e 90% do valor final de regime.

O tempo de acomodação (*Settling time*) -  $t_s$  – é o tempo necessário para que a resposta do sistema atinja e permaneça numa faixa de regime correspondente a 2% do valor final.

Para sistemas de segunda ordem existem expressões analíticas para cálculo desses valores. Nosso sistema não é de segunda ordem, uma vez que o motor mais o medidor possuem três pólos, portanto iremos utilizar como critério apenas o máximo valor de sobre-sinal e o tempo de acomodação.

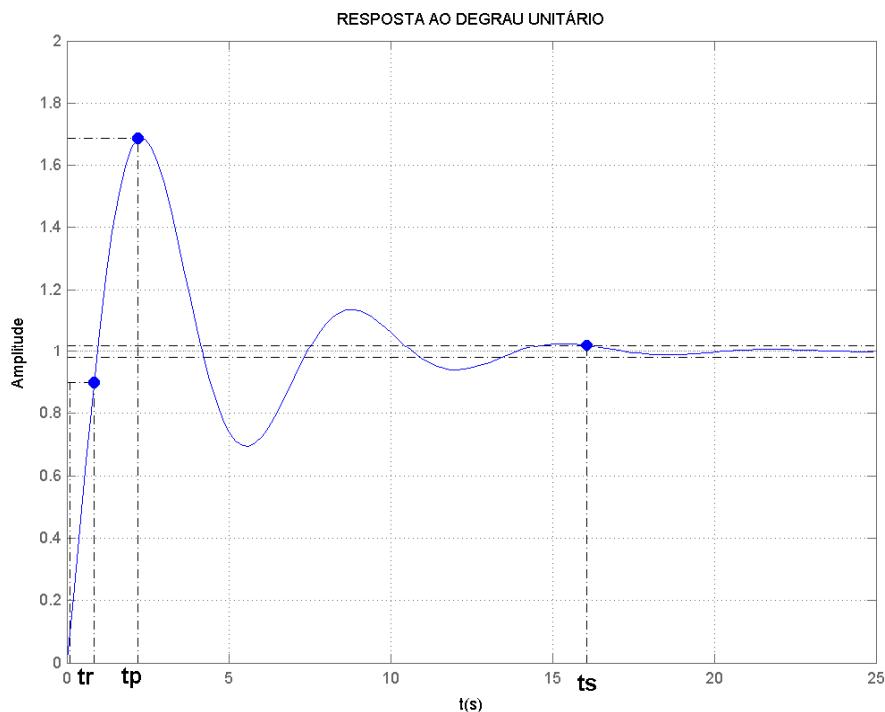


Figura 3.1 - Parâmetros de desempenho para resposta ao degrau

### 3.3. **Métodos de sintonia e projeto de controladores PID analógicos**

Sintonizar um controlador é a atividade de ajuste dos parâmetros do mesmo, de forma a atender a diversos critérios para a resposta do sistema.

Em geral procura-se atender aos seguintes critérios:

1. Minimização da área da curva de resposta do sistema correspondente ao erro do controlador.
2. Critério da perturbação mínima onde se deseja que o sistema atinja a estabilidade no menor tempo possível.
3. Critério da amplitude mínima das oscilações onde se deseja que a amplitude do sinal de saída seja a menor possível.

Diversos métodos de sintonia foram desenvolvidos de forma a atender tais critérios, mas a maioria deles considera o critério da área mínima, ou seja, procuram minimizar a integral do erro ao longo do tempo.

O modelo obtido para a MCC é do tipo 2<sup>a</sup> ordem sem tempo morto, sendo superamortecido como foi visto anteriormente através dos ensaios, logo, métodos de sintonia baseados em modelos de 1<sup>a</sup> ordem mais tempo morto (Curva de reação, Cohen-Coon e etc.) não podem ser aplicados a este caso (GARCIA, 2001).

Neste trabalho exploraremos o método das oscilações contínuas de Ziegler e Nichols, baseado em relações empíricas de ajuste, e dois métodos baseados no modelo do processo: a síntese direta e o projeto por cancelamento de pólos.

### **3.3.1. Método das oscilações contínuas de Ziegler-Nichols (OCZN)**

Neste método, proposto em 1942 por Ziegler e Nichols, os valores dos parâmetros do controlador são funções do ganho limite do controlador ( $K_{cu}$ ) e do período limite ( $P_u$ ), obtidos ao levar-se o sistema ao limite da estabilidade.

Este método foi desenvolvido para prover uma resposta com decaimento de 1/4 entre o primeiro e o segundo picos da resposta ao degrau em malha fechada.

Não é necessário o conhecimento do modelo do processo, por que o ganho e período limites podem ser obtidos através de ensaios no campo, aplicando entradas em degrau unitário no sistema e variando o ganho do controlador até obter as oscilações contínuas, porém, neste caso temos os mesmos inconvenientes dos métodos de tentativa e erro, ou seja, gastos elevados com matéria-prima e custos de mão-de-obra elevados. Outra consideração importante é que levar um sistema ao limite da estabilidade é extremamente perigoso, por que podemos extrapolá-lo causando acidentes, danificando equipamentos ou ainda interrompendo a produção com perdas de matéria-prima.

Uma modificação do método de Ziegler-Nichols foi proposta por Åström e Hägglund (ÅSTRÖM et al, 1995), apresentando uma metodologia que propicia a oscilação do sistema com pequenas amplitudes e uma relação, para a partir desta amplitude, calcular o ganho crítico. Quando não se tem o modelo do processo, esta modificação propicia maior segurança no momento de realizar os ensaios em malha fechada, uma vez que não é necessário levar o sistema ao limite de instabilidade. Como temos o modelo do processo não é necessário o uso desta modificação.

A Tabela 3.1 apresenta os valores dos parâmetros para controladores P, PI, PD e PID em função dos valores do ganho e período críticos do sistema, conforme desenvolvido por Ziegler e Nichols.

**Tabela 3.1 – Valores dos parâmetros do controlador por Ziegler-Nichols**

Controlador	$K_C$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5.K_{CU}$	-	-
PI	$0,45.K_{CU}$	$P_U/1,2$	-
PD	$0,6.K_{CU}$	-	$P_U/8$
PID	$0,6.K_{CU}$	$P_U/2$	$P_U/8$

A Tabela 3.2 apresenta os valores dos parâmetros de sintonia considerando o período e ganho críticos calculados anteriormente.

**Tabela 3.2 – Valores obtidos para os parâmetros de sintonia**

Controlador	<b>K<sub>C</sub></b>	<b>T<sub>i</sub></b>	<b>T<sub>d</sub></b>
<b>P</b>	425,6	-	-
<b>PI</b>	383,0	$5,0259 \cdot 10^{-3}$	-
<b>PD</b>	510,7	-	$7,5389 \cdot 10^{-4}$
<b>PID</b>	510,7	$3,0156 \cdot 10^{-3}$	$7,5389 \cdot 10^{-4}$

Abaixo apresentamos os controladores obtidos, utilizando os dois algoritmos propostos:

$$G_{c1}(s) = 510,7 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3,0156 \cdot 10^{-3} \cdot s} + 7,5389 \cdot 10^{-4} \cdot s \right)$$

$$G_{c2}(s) = 510,5 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3,0156 \cdot 10^{-3} \cdot s} + \frac{7,5389 \cdot 10^{-4} \cdot s}{7,5389 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1} \right)$$

$$G_{c3}(s) = 383,0 \cdot \left( 1 + \frac{1}{5,0259 \cdot 10^{-3} \cdot s} \right)$$

$$G_{c4}(s) = 425,6$$

$$G_{c5}(s) = 510,7 \cdot \left( 1 + 7,5389 \cdot 10^{-4} \cdot s \right)$$

$$G_{c6}(s) = 510,7 \cdot \left( 1 + \frac{7,5389 \cdot 10^{-4} \cdot s}{7,5389 \cdot 10^{-5} \cdot s + 1} \right)$$

### 3.3.2. Método da síntese direta

Neste método obrigatoriamente precisamos do modelo matemático do sistema representado por suas funções de transferência. Estipula-se então a resposta desejada para o sistema e a equação do controlador é desenvolvida analiticamente.

Iremos manipular algebricamente a equação (2.34), que representa a função de transferência em malha fechada do servossistema, de forma a obter a equação para o controlador em função do modelo dos demais elementos da malha de controle.

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} \cdot [1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)] = K_{MM} \cdot G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s)$$

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = K_{MM} \cdot G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) - G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s) \cdot \frac{W_1(s)}{W_R(s)}$$

$$\left( \frac{W_1(s)}{W_R(s)} \right) = \left[ K_{MM} - G_{MM}(s) \cdot \left( \frac{W_1(s)}{W_R(s)} \right) \right] \cdot G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s)$$

$$G_C(s) = \frac{\left( \frac{W_1(s)}{W_R(s)} \right)}{\left[ K_{MM} - G_{MM}(s) \cdot \left( \frac{W_1(s)}{W_R(s)} \right) \right] \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s)}$$

Para simplificação do controlador obtido, consideraremos o medidor como ideal. Além disso, simplificamos o modelo do motor (2.26), desprezando sua menor constante de tempo, resultando em:

$$G_{MApprox}(s) = \frac{46,5204}{7,0067 \cdot 10^{-3} s + 1} = \frac{6639,3914}{(s + 1,4272 \cdot 10^2)}$$

Obteremos então:

$$G_C(s) = \frac{\left( \frac{W_1(s)}{W_R(s)} \right)}{\left[ 1 - \left( \frac{W_1(s)}{W_R(s)} \right) \right] \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_{MApprox}(s) \cdot K_{MM}} \quad (3.9)$$

A resposta desejada, para uma mudança em degrau do valor de referência, deve ser a mais próxima possível de um degrau. Como fisicamente não é possível realizar um controlador que responda imediatamente, vamos admitir um pequeno atraso na resposta do controlador. Logo podemos escrever:

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = \left( \frac{1}{1 + s \cdot \tau_c} \right), \text{ onde } \tau_c \text{ é o atraso proposto.}$$

Substituindo a relação acima na equação (3.9) teremos:

$$G_C(s) = \frac{\left( \frac{1}{1 + s \cdot \tau_c} \right)}{\left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + s \cdot \tau_c} \right) \right] \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_{MApprox}(s) \cdot K_{MM}}$$

$$G_C(s) = \frac{\left( \frac{1}{1 + s \cdot \tau_c} \right)}{\left[ \frac{s \cdot \tau_c}{1 + s \cdot \tau_c} \right] \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_{MApprox}(s) \cdot K_{MM}}$$

$$G_C(s) = \frac{1}{G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_{MApprox}(s) \cdot K_{MM} \cdot s \cdot \tau_c}$$

Substituindo as funções de transferência dos dispositivos, e denominando este controlador de  $G_{C7}$  teremos:

$$G_{C7}(s) = \frac{1}{\frac{1,2}{s + 1,2} \cdot 12 \cdot \frac{6639,3914}{s + 1,4272 \cdot 10^2} \cdot 0,013582 \cdot s \cdot \tau_c}$$

$$G_{C7}(s) = \frac{s^2 + 143,92 \cdot s + 171,264}{1,2985 \cdot 10^3 \cdot s \cdot \tau_c} = \frac{1}{1,2985 \cdot 10^3 \cdot \tau_c} \cdot \left( \frac{171,264}{s} + 143,92 + s \right)$$

$$G_{C7}(s) = \frac{143,92}{1,2985 \cdot 10^3 \cdot \tau_c} \cdot \left( 1 + \frac{1,19}{s} + 6,9483 \cdot 10^{-3} \cdot s \right)$$

$$G_{C7}(s) = \frac{11,0836 \cdot 10^{-2}}{\tau_c} \cdot \left( 1 + \frac{1}{84,0336 \cdot 10^{-2} \cdot s} + 6,9483 \cdot 10^{-3} \cdot s \right)$$

A estrutura do controlador acima é a de um controlador PID, utilizando o algoritmo clássico, com os seguintes parâmetros:

$$K_c = 11,0836 \cdot 10^{-2} / \tau_c$$

$$T_i = 84,0336 \cdot 10^{-2}$$

$$T_d = 6,9483 \cdot 10^{-3}$$

Faremos a escolha de  $\tau_c$  adotando como critério a estabilidade do sistema em malha fechada, ou seja, como  $\tau_c$  afeta diretamente o ganho proporcional do controlador adotaremos um valor que não leve o sistema à instabilidade.

O ganho crítico do controlador, limite para estabilidade do sistema, calculado anteriormente é  $K_C = K_{CU} = 851$ . Logo escolheremos  $\tau_c$  num intervalo que não permita que o sistema torne-se instável. Para tal teremos:

$$\frac{11,0836 \cdot 10^{-2}}{\tau_c} < 851 \Rightarrow \tau_c > 1,3024 \cdot 10^{-4}$$

Quanto mais próximo do limite de estabilidade o sistema operar mais oscilatório será seu comportamento, portanto adotaremos um valor para  $\tau_c$  2 vezes superior ao seu valor mínimo de forma a nos afastarmos desse limite.

Nesta condição o ganho proporcional do controlador será dado por:

$$K_c = \frac{11,0836 \cdot 10^{-2}}{2,6048 \cdot 10^{-4}} = 425,51$$

Para este ganho a equação do controlador ficará:

$$G_{C7}(s) = 425,51 \cdot \left( 1 + \frac{1}{84,0336 \cdot 10^{-2} \cdot s} + 6,9483 \cdot 10^{-3} \cdot s \right)$$

### 3.3.3. Projeto por cancelamento de pólos

Sabemos que a estabilidade de um sistema linear está diretamente associada à posição dos pólos no plano complexo s. Para que o sistema seja estável, seus pólos devem estar no semiplano da esquerda do plano s. Caso um pólo apenas esteja localizado no lado direito o sistema será instável. Quanto mais próximo do eixo imaginário estiver um pólo dominante do sistema maior será a velocidade de resposta e quanto mais próximo do eixo real maior o amortecimento. Podemos verificar então que modificando a posição, cancelando e/ou adicionando pólos, através do projeto adequado do controlador, podemos obter resultados satisfatórios para a resposta transitória.

Uma técnica muito simples para cálculo dos parâmetros de um controlador é o cancelamento de pólos do sistema. Em geral opta-se por cancelar o pólo dominante do sistema (aquele que está mais próximo do eixo imaginário).

Sabemos que a função de transferência do motor representa um sistema de segunda ordem superamortecido com um coeficiente de amortecimento maior que um. Desejamos tornar a resposta transitória mais rápida sem causar valores muito altos de sobre-sinal. Para tal vamos considerar o coeficiente de amortecimento  $\xi=0,358$  que deverá gerar um sobre-sinal de aproximadamente 30% conforme podemos verificar na equação abaixo, que relaciona o valor do sobre-sinal ao coeficiente de amortecimento.

$$M_p = e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{-\pi \cdot 0,358}{\sqrt{1-0,12816}}} \cong 29,98\%$$

A equação característica, em malha fechada, é dada por:

$$A(s) = 1 + G_c(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s) = 0$$

Considerando o medidor com dinâmica desprezível e o modelo aproximado do motor de forma a obtermos uma equação característica típica para um sistema de segunda ordem, podemos simplificá-la como segue:

$$A(s) = 1 + G_c(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_{M\text{Aprox}}(s) \cdot K_{MM} = 0$$

Substituindo as funções de transferência dos dispositivos, teremos:

$$1 + G_c(s) \cdot \frac{1,2}{s+1,2} \cdot 12 \cdot \frac{6639,3914}{s+1,4272 \cdot 10^2} \cdot 0,013582 = 0$$

$$1 + G_c(s) \cdot \frac{1298,5375}{(s+1,2) \cdot (s+142,72)} = 0$$

Para projeto de um controlador proporcional iremos considerar  $G_c(s) = K_c$ , logo:

$$s^2 + 143,92 \cdot s + 171,264 + 1298,5375 \cdot K_c = 0$$

Comparando a equação acima com o denominador,  $s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$ , da equação canônica dos sistemas de segunda ordem teremos:

$$\begin{cases} 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 143,92 \\ \omega_n^2 = 171,264 + 1298,5375 \cdot K_c \end{cases}$$

Impondo  $\xi = 0,358$  e resolvendo o sistema de equações acima teremos:

$$\begin{cases} \omega_n = 201,0056 \text{ rad/s} \\ K_c = 30,98 \end{cases}$$

A equação do controlador proporcional será dada por:

$$G_{C8}(s) = 30,98$$

Para projeto do controlador proporcional-integral iremos considerar a equação abaixo, que propiciará o cancelamento do pólo dominante do sistema.

$$G_{C9}(s) = \frac{K_c \cdot (s + 1,2)}{s}$$

$$T_i = \frac{1}{1,2} = 0,8333s$$

Substituindo na equação característica teremos:

$$1 + \frac{K_c \cdot (s + 1,2)}{s} \cdot \frac{1298,5375}{(s + 1,2) \cdot (s + 142,72)} = 0$$

$$s^2 + 142,72 \cdot s + 1298,5375 \cdot K_c = 0$$

Comparando a equação acima com o denominador,  $s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$ , da equação canônica dos sistemas de segunda ordem teremos:

$$\begin{cases} 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 142,72 \\ \omega_n^2 = 1298,5375 \cdot K_c \end{cases}$$

Impondo  $\xi = 0,358$  e resolvendo o sistema de equações acima teremos:

$$\begin{cases} \omega_n = 199,3296 \text{ rad/s} \\ K_c = 30,598 \end{cases}$$

A equação do controlador proporcional-integral será dada por:

$$G_{C9}(s) = 30,598 \cdot \left( 1 + \frac{1}{0,8333 \cdot s} \right)$$

Para o caso do controlador PID será considerada a função de transferência completa do motor (2.26), de forma a obter após o cancelamento dos pólos do motor pelo controlador, uma equação característica no formato da equação canônica dos sistemas de segunda ordem. Não foi considerada a função de transferência do medidor. Neste caso, ela ficará como segue:

$$1 + G_c(s) \cdot \frac{1,2}{s + 1,2} \cdot 12 \cdot \frac{5,0149 \cdot 10^7}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6} = 0$$

$$1 + G_c(s) \cdot \frac{722,1456 \cdot 10^6}{(s + 1,2) \cdot (s + 7,5496 \cdot 10^3) \cdot (s + 1,4272 \cdot 10^2)} = 0$$

Imporemos a seguinte equação para o controlador, que irá cancelar o pólo dominante do motor e o pólo do sistema de aquisição:

$$G_{C10}(s) = \frac{K_c \cdot (s + 1,2) \cdot (s + 142,72)}{s}$$

Substituindo na equação característica teremos:

$$1 + \frac{K_c}{s} \cdot \frac{722,1456 \cdot 10^6}{(s + 7,5496 \cdot 10^3)} = 0$$

$$s^2 + 7,5496 \cdot 10^3 \cdot s + 722,1456 \cdot K_c = 0$$

Comparando a equação acima com o denominador,  $s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$ , da equação canônica dos sistemas de segunda ordem teremos:

$$\begin{cases} 2 \cdot \xi \cdot \omega_n = 7,5496 \cdot 10^3 \\ \omega_n^2 = 722,1456 \cdot K_c \end{cases}$$

Impondo  $\xi = 0,358$  e resolvendo o sistema de equações acima teremos:

$$\begin{cases} \omega_n = 10,544 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \\ K_c = 153,9561 \cdot 10^3 \end{cases}$$

Substituindo  $K_c$  na equação do controlador e rearranjando-a teremos:

$$G_{C10}(s) = 1069,7339 \cdot \left( 1 + \frac{1}{0,84034 \cdot s} + 6,9483 \cdot 10^{-3} \cdot s \right)$$

### 3.4. Comparação dos controladores obtidos

Os sistemas obtidos com os controladores projetados anteriormente foram submetidos a duas baterias de simulações considerando variações no valor de referencia e variações na carga, para analise do desempenho de cada um dos controladores. Para tal foi utilizado o Simulink®, pacote de simulação do MATLAB®.

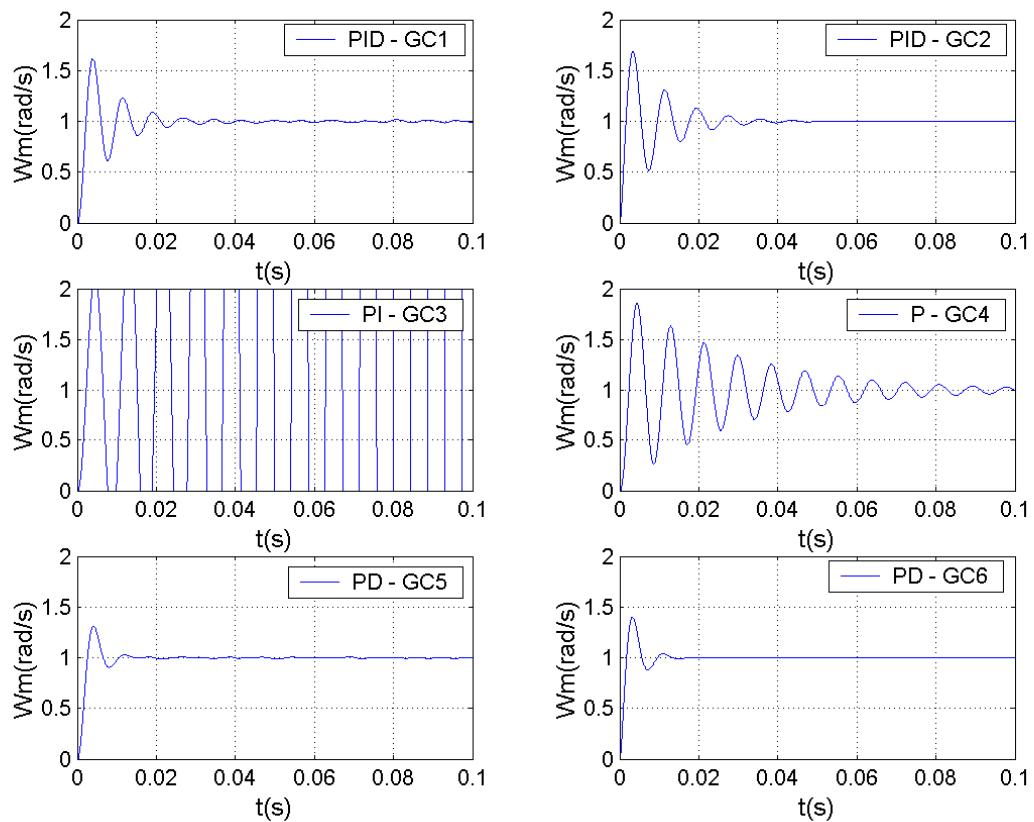
Diversos algoritmos de integração, disponíveis no Simulink®, foram testados, porém o que apresentou os resultados mais precisos foi o ODE23 o qual foi adotado para todas as simulações. O Simulink® foi configurado ainda com fator de refinamento unitário, tolerância relativa de  $1 \cdot 10^{-4}$ , tolerância absoluta automática e tempo de simulação de  $5 \cdot 10^{-3}$  segundos.

Durante as simulações verificamos que o controlador Proporcional-Integral  $G_{C3}$  levou o sistema à instabilidade e, portanto foi descartado das comparações.

### 3.4.1. Resultados da primeira bateria de simulações

Na primeira bateria de simulações foi aplicado no instante  $t=0$  um degrau unitário no valor de referência a cada um dos sistemas. Foram levantados os máximos valores de sobre-sinal e tempo de acomodação para cada um dos sistemas.

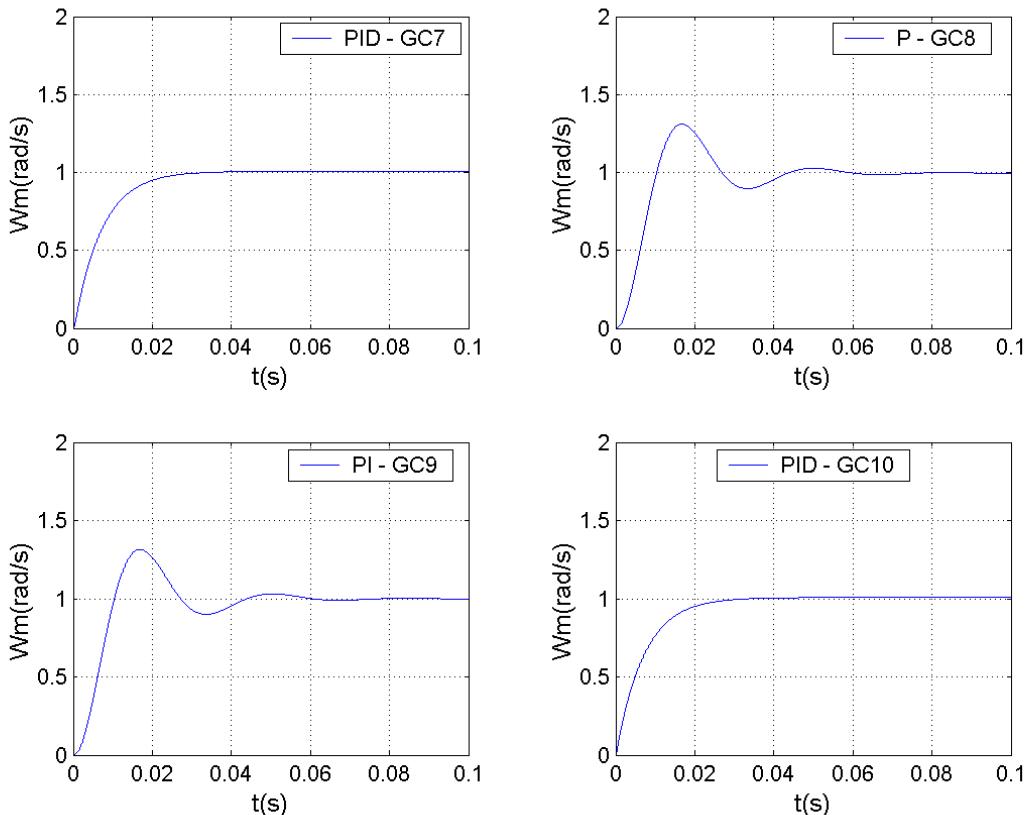
A Figura 3.2 apresenta as respostas obtidas para os controladores sintonizados por Ziegler-nichols. Observamos que  $G_{C3}$  levou o sistema a instabilidade e que  $G_{C4}$  apresentou o maior sobressinal. Os controladores PD apresentaram sobressinal menor que os controladores PID



**Figura 3.2 – Resposta a degrau unitário – Controladores sintonizados pelo método de Ziegler-Nichols**

A Figura 3.3 apresenta a resposta a degrau dos controladores sintonizados por síntese direta e por cancelamento de pólos.

É interessante observar a semelhança entre os controladores  $G_{C7}$  e  $G_{C10}$ . De fato como o controlador PID  $G_{C7}$  foi projetado para obtermos uma resposta a mais próxima possível de um degrau, ele efetivamente cancela os pólos do motor, de forma análoga ao projeto por cancelamento de pólos. Embora o ganho do controlador  $G_{C10}$  seja aproximadamente duas vezes superior ao ganho do controlador  $G_{C7}$  não houve melhora do desempenho, uma vez que as curvas de resposta são muito parecidas. Neste caso concluímos que o uso do controlador  $G_{C7}$  seria vantajoso em relação a  $G_{C10}$  uma vez que teríamos menor esforço de controle, traduzindo-se numa maior vida útil do circuito de acionamento.



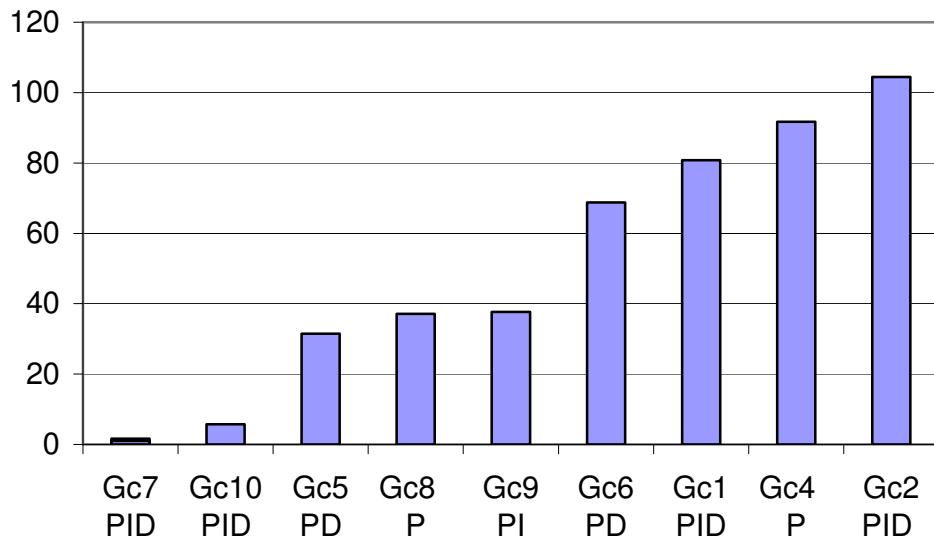
**Figura 3.3 - Resposta a degrau unitário – Controladores sintonizados por síntese direta e cancelamento de pólos**

Observamos que dentre estes controladores o pior desempenho foi obtido para o controlador  $G_{C3}$ , que apresentou resposta instável. Por isto seus resultados serão desprezados na análise de desempenho.

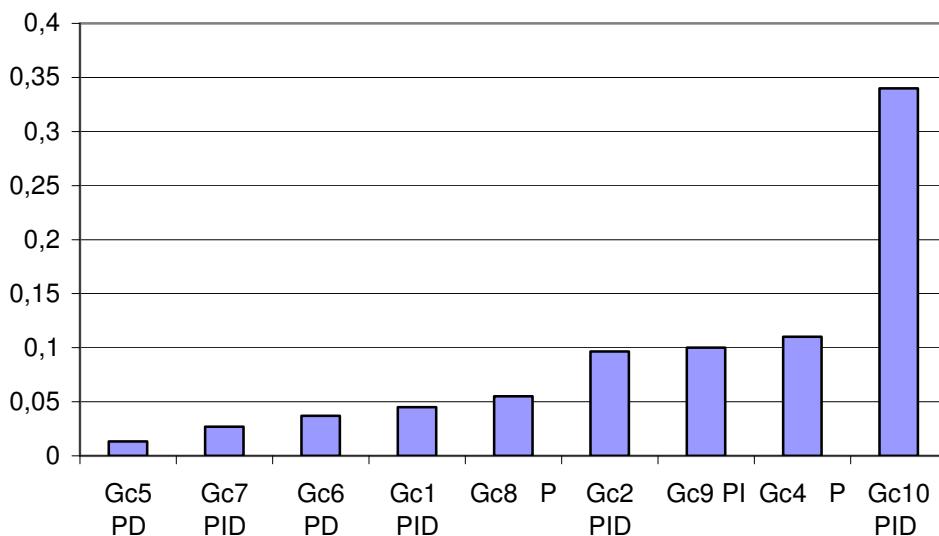
Para análise dos resultados vamos verificar o sobre-sinal máximo, o tempo de acomodação, o erro em regime permanente e os índices ITAE e ITSE.

Podemos verificar que os controladores sintonizados pelo método de Ziegler-Nichols apresentaram valores de sobre-sinal superiores aos demais. Isto pode ser verificado claramente na Figura 3.4 que mostra os valores de sobre-sinais obtidos para cada controlador.

O controlador PID  $G_{C7}$  projetado por síntese direta apresentou um valor mínimo para o sobre-sinal, conforme esperado uma vez que seu projeto levou em consideração que a resposta do sistema seria o mais próximo possível de um degrau unitário. O controlador proporcional  $G_{C8}$  e o proporcional-integral  $G_{C9}$ , projetados por cancelamento de pólos atingiram as especificações de projeto que consideravam um sobre-sinal máximo de aproximadamente 30%. O controlador PID  $G_{C10}$ , contudo, apesar de ser projetado para um sobre-sinal máximo de 30%, não atingiu o valor esperado. No projeto deste controlador os pólos do motor, mais próximos do semiplano da direita, são cancelados restando apenas o pólo relativo ao medidor, que por estar muito distante do eixo imaginário, acrescenta muito amortecimento ao sistema. Verificamos que este controlador apresenta sobre-sinal semelhante ao controlador PID  $G_{C7}$  que não leva em conta no seu projeto o pólo relativo ao medidor e considera o modelo simplificado do motor.

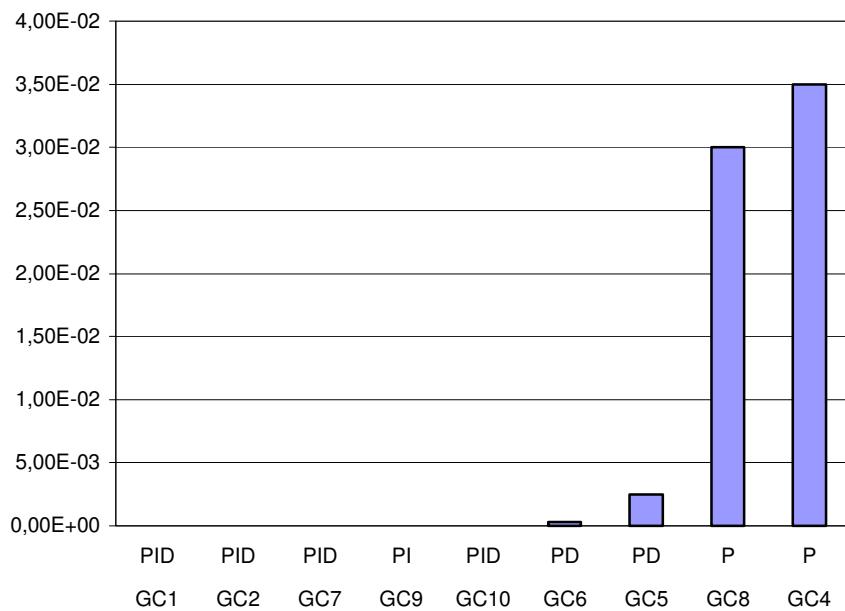


**Figura 3.4 - Sobre-sinal máximo dos controladores analógicos**



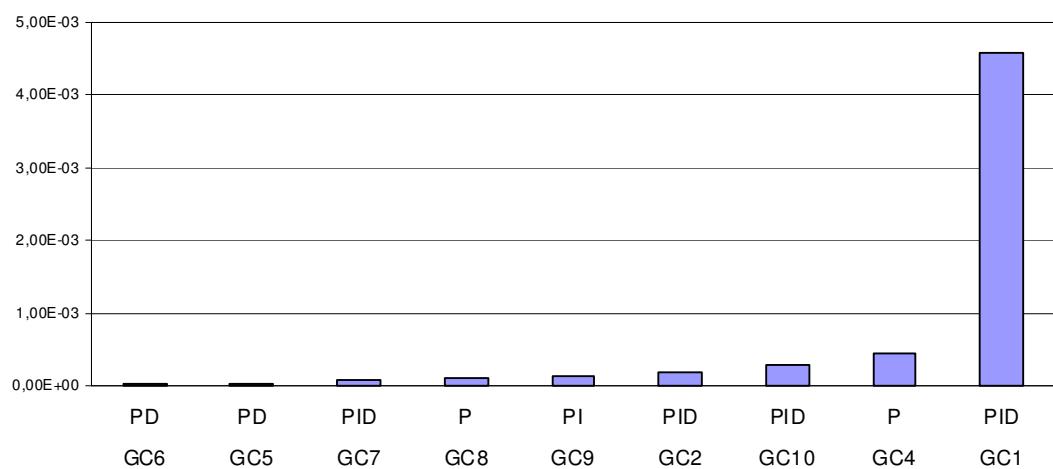
**Figura 3.5- Tempos de acomodação dos controladores analógicos**

Os tempos de acomodação são apresentados na Figura 3.5. Nela podemos verificar que com exceção do controlador proporcional  $G_{C10}$ , que apresentou resposta muito lenta e do controlador  $G_{C3}$  (que levou o sistema à instabilidade), todos os outros controladores estabilizam rapidamente em tempos menores que 0,11 s, ou seja, no mínimo 18 vezes mais rápido que no sistema original em malha aberta.



**Figura 3.6 - Erro em regime permanente**

Os valores para o erro em regime permanente são apresentados na Figura 3.6. Conforme esperado os erros em regime estacionário só ocorreram nos controladores, que não possuem a ação integral, ou seja, os controladores proporcionais ( $G_{C4}$  e  $G_{C8}$ ) e proporcionais-derivativos ( $G_{C5}$  e  $G_{C6}$ ). Dentre os controladores que apresentaram erro em regime estacionário os que geraram os maiores erros foram  $G_{C4}$  e  $G_{C8}$ .



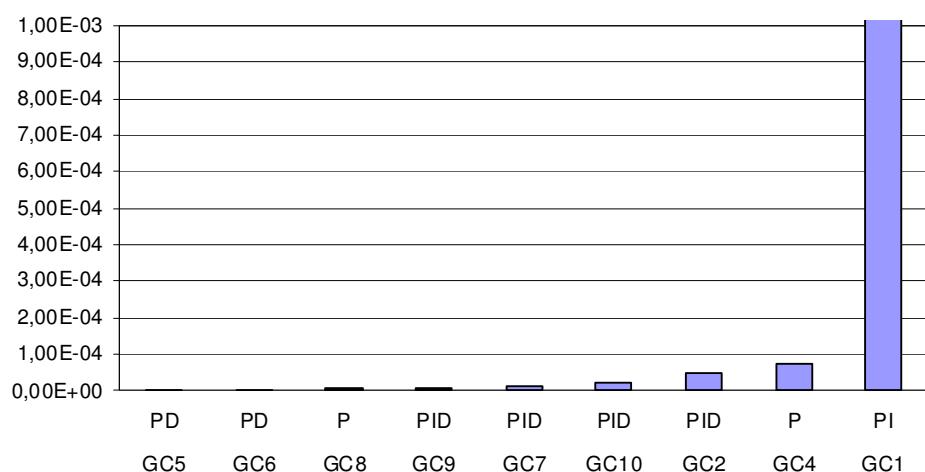
**Figura 3.7 - Índices ITAE obtidos durante a 1a bateria de simulações**

Os valores obtidos para o ITAE, apresentados na Figura 3.7, indicam que os controladores  $G_{C1}$ ,  $G_{C4}$ ,  $G_{C2}$ , e  $G_{C10}$ , ou demoram muito para atingir a estabilidade ou apresentam erros estacionários altos em relação aos demais, uma vez que este índice penaliza mais erros que ocorrem mais tarde (GARCIA, 2001). De fato estes controladores apresentam também elevados tempos de estabilização.

Os controladores proporcionais  $G_{C4}$  e  $G_{C8}$  também apresentaram erro em regime estacionário bem superior aos demais controladores. O controlador PID  $G_{C10}$  não atingiu o valor de referência no período simulado e o controlador PI  $G_{C9}$  possui um dos maiores tempos de acomodação inferior apenas a  $G_{C4}$  e  $G_{C10}$ .  $G_{C4}$  adicionalmente apresentou uma resposta muito mais oscilatória que as demais, justificando assim possuir o elevado índice ITAE.

Pelo índice ITAE os melhores controladores seriam o PD  $G_{C6}$ , seguido do PD  $G_{C5}$ , do PID  $G_{C7}$  e do P  $G_{C8}$  e os piores controladores seriam o proporcional  $G_{C4}$  e os PID's  $G_{C10}$  e  $G_{C1}$ .

A Figura 3.8 apresenta os valores obtidos para o índice ITSE obtidos na 1<sup>a</sup> bateria de simulações. Este índice penaliza mais fortemente erros que ocorrem mais tarde e erros muito grandes (GARCIA, 2001).



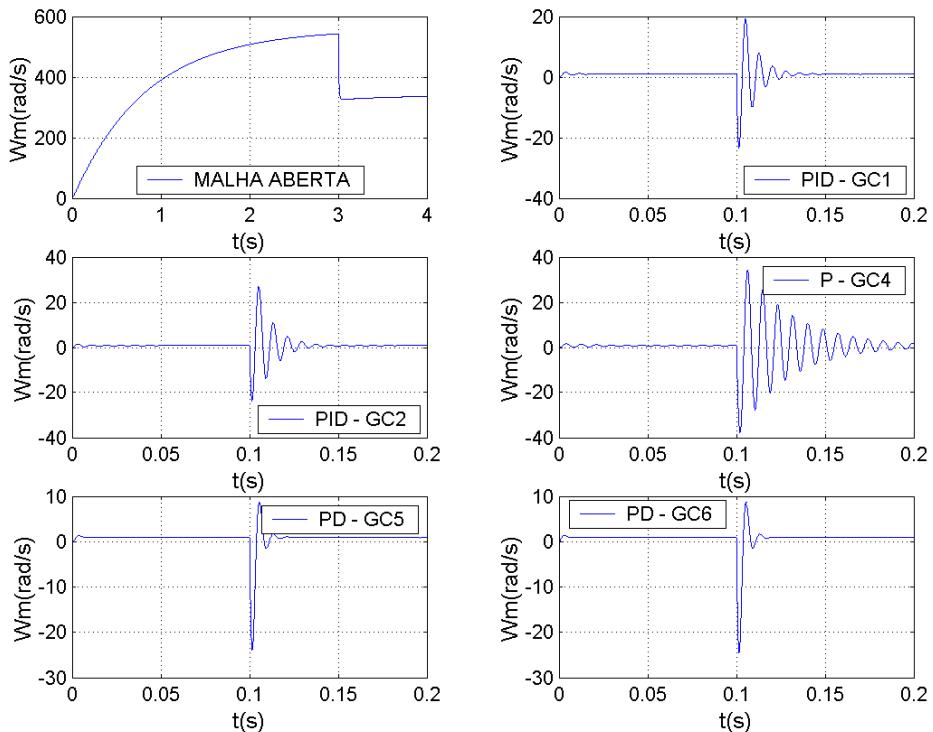
**Figura 3.8 - Índices ITSE obtidos durante a 1a bateria de simulações**

Por este critério os melhores controladores seriam  $G_{C5}$  e  $G_{C6}$ , seguidos pelos controladores  $G_{C8}$  e  $G_{C9}$ , enquanto que o controlador PI  $G_{C1}$  seria o pior.

### 3.4.2. Resultados da segunda bateria de simulações

Na segunda bateria de simulações foi aplicado um degrau unitário no valor de referência em  $t=0$  e passado o tempo de acomodação aplicamos um degrau de 0,2 na carga de forma a verificar o efeito da variação de carga na resposta do sistema.

A Figura 3.9 apresenta a forma de onda obtida no sistema em malha fechada, quando submetido à variação de carga utilizando os controladores projetados pelo método de Ziegler-Nichols, exceto o controlador  $G_{C3}$  que apresenta resposta instável. Para o sistema em malha aberta, efetuamos o ensaio a degrau unitário, sem carga, até 3s, suficiente para acomodação do sinal, e em seguida aplicamos o degrau de 0,2 na carga.

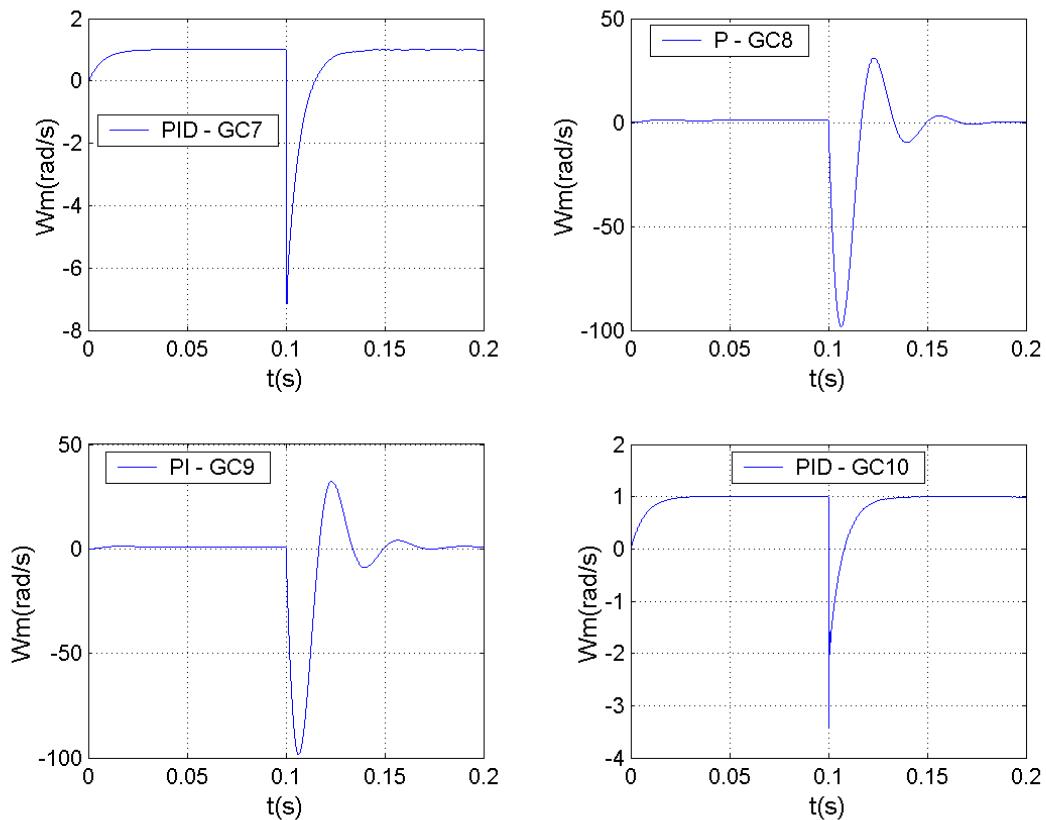


**Figura 3.9 – Resposta a degrau unitário e variação de 0,2 na carga – Controladores sintonizados pelo método de Ziegler-Nichols**

Verificamos que todas as respostas convergem para o valor de referencia ajustado porém o controlador  $G_{C4}$  apresentou uma resposta mais lenta e mais oscilatória.

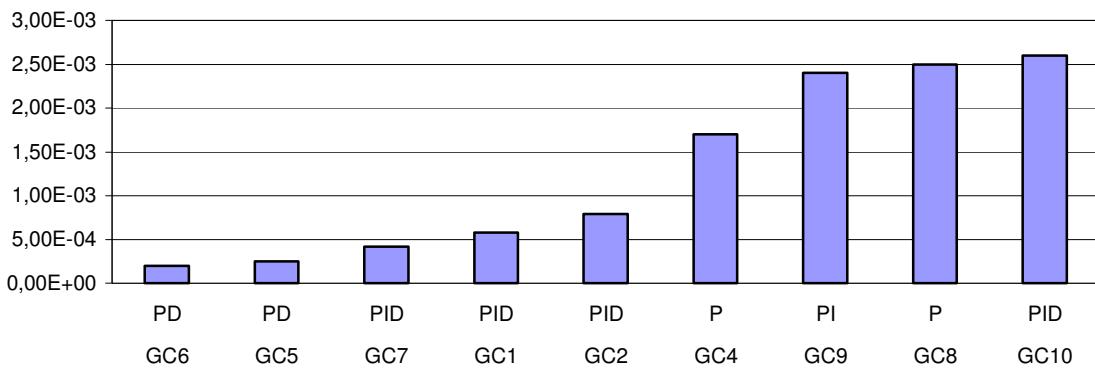
A Figura 3.10 apresenta as formas de onda obtidas pelos controladores projetados por síntese direta e por cancelamento de pólos nas mesmas condições de variação de carga dos outros controladores citados acima.

As respostas de todos os controladores convergiram para o valor de referencia porém cabe ressaltar que a variação na carga causou um扰动 maior nos controladores PID.



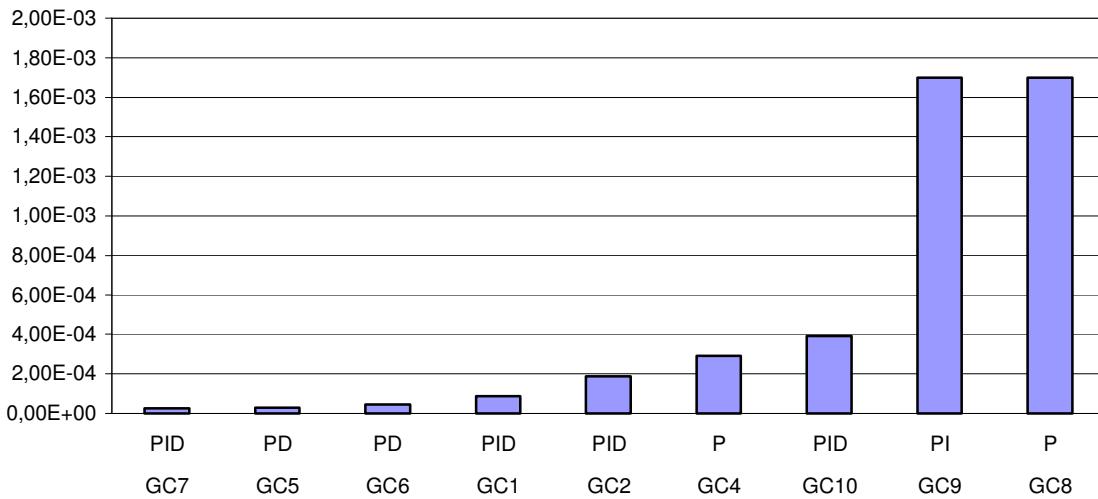
**Figura 3.10 – Resposta a degrau unitário e variação de 0,2 na carga – Controladores sintonizados por síntese direta e cancelamento de pólos**

Os índices ITAE e ITSE foram levantados para a resposta de cada um dos controladores.



**Figura 3.11 - Índices ITAE obtidos com variação de carga**

Os valores obtidos para o ITAE são apresentados na Figura 3.11. Podemos constatar que os piores controladores são os controladores projetados pelo método do cancelamento de pólos ( $G_{C10}$ ,  $G_{C8}$  e  $G_{C9}$ ) e os melhores são os controladores PD's  $G_{C6}$  e  $G_{C5}$ . Os valores obtidos para o ITSE são apresentados na Figura 3.12. Neste caso os piores controladores são  $G_{C8}$  e  $G_{C9}$  e os melhores são os controladores  $G_{C7}$  e  $G_{C5}$ .



**Figura 3.12 - Índices ITSE obtidos com variação de carga**

### **3.5. Conclusões**

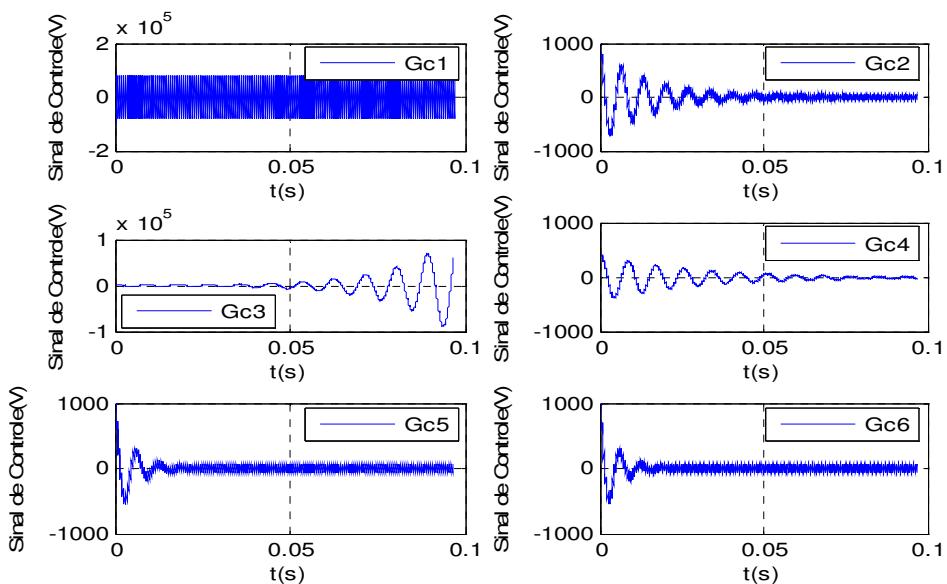
Os critérios acima permitiram que tirássemos diversas conclusões, porém, a escolha do melhor controlador depende de cada projeto e dos limites físicos de cada dispositivo.

De qualquer forma, os melhores resultados foram obtidos pelos controladores  $G_{C5}$  e  $G_{C7}$  seguidos pelos controladores  $G_{C6}$  e depois pelos controladores  $G_{C9}$  e  $G_{C10}$ , que são os que mais vezes aparecem entre os três com melhor desempenho.

Sabemos que a rotação nominal do motor é de aproximadamente 555 rad/s em vazio resultando em 7,57 V no medidor. Isto significa que se desejarmos acelerar o motor até uma velocidade de 500 rad/s, o sobre-sinal será um fator determinante na escolha do controlador, uma vez que não poderá ser maior do que aproximadamente 10%. Neste caso os controladores  $G_{C7}$  e  $G_{C10}$  seriam os mais adequados.

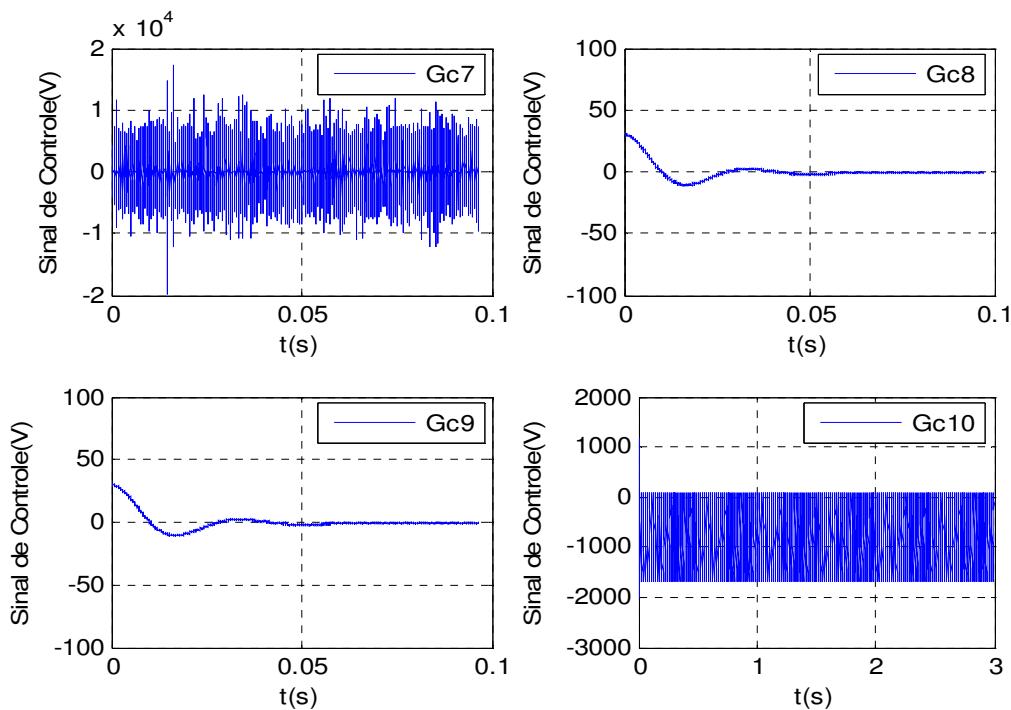
Noutro exemplo, caso não formos trabalhar no limite da rotação do motor, e as variações na carga não forem expressivas e ainda a precisão não for um fator limitante, então os controladores PID  $G_{C1}$ ,  $G_{C2}$ ,  $G_{C7}$  e  $G_{C10}$ , que apresentaram pequenos erros em regime permanente, poderiam ser os escolhidos.

Além do controlador PI  $G_3$  que apresentou resposta instável, o controlador proporcional  $G_{C4}$  seguido pelos controladores PID  $G_{C1}$  e  $G_{C2}$ , todos sintonizados por Ziegler-Nichols, estão sempre entre os que obtiveram os piores índices.



**Figura 3.13 – Sinais de controle produzidos pelos controladores sintonizados por Ziegler-Nichols**

Por outro lado, antes de desenvolver o controle prático é importante verificar o sinal de controle produzido em todos os casos. Monitorando o sinal de controle ao longo do tempo, nas mesmas condições em que foram efetuados os ensaios da 1<sup>a</sup> bateria de simulações foram obtidas as formas de onda da Figura 3.13 e Figura 3.14.



**Figura 3.14 – Sinais de controle produzidos pelos controladores sintonizados por síntese direta e cancelamento de pólos**

Analisando estas formas de onda dos sinais de controle produzidos podemos concluir que todos os controladores produzem sinais de controle elevados que provavelmente deverão exceder os valores limites possíveis para os atuadores no sistema de controle. A consequência disto é que o desempenho do sistema para cada um dos controladores projetados, e principalmente os tempos de resposta obtidos, poderão ser comprometidos devido à saturação do sinal de controle. Observamos também que alguns controladores produziram sinais de controle instáveis, variando ao longo de uma ampla faixa.

Considerando a limitação no valor dos atuadores e analisando as formas de ondas obtidas para o sinal de controle podemos observar que os controladores que apresentam sinais de controle mais apropriados são os controladores  $G_{C8}$  e  $G_{C9}$ , pois produzem sinais de controle mais estáveis e com valores mais baixos, portanto menos sujeitos a saturação.

## 4. CONTROLADORES PID DIGITAIS

Como a maioria dos controladores atuais é baseada em microprocessadores e/ou microcontroladores, os quais não realizam integrações, mas apenas somatórias e produtos, são necessárias modificações no algoritmo do controlador PID analógico, de forma a adequá-lo às novas tecnologias.

O algoritmo do controlador PID analógico é dado pela equação diferencial abaixo:

$$m(t) = K_c \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) + m_0 \quad (4.1)$$

Para resolvê-la utilizando um computador precisamos transformá-la numa equação algébrica envolvendo apenas somas e produtos, utilizando aproximações dos termos derivativo e integral.

Diversas aproximações podem ser utilizadas gerando algoritmos diferentes, tais como a Regra retangular para frente (Método de Euler), a Regra retangular para trás e a Regra trapezoidal (ou método de Tustin).

O Método de Euler não será abordado, uma vez que a sua utilização em controladores PID levará a um algoritmo onde, para cálculo do valor da saída do controlador no instante  $k$  (instante atual), seria necessário o valor do erro no instante  $k+1$  e, portanto este método leva a um algoritmo não-causal (GARCIA, 2001).

#### 4.1. Aproximação do tipo diferença ou integração retangular para trás

Nesta aproximação, também chamada de “*backward difference*”, o termo integral é substituído por uma somatória e o termo derivativo por uma diferença de 1<sup>a</sup> ordem (GARCIA, 2002) conforme abaixo:

$$\int_0^t e(t)dt \cong \sum_{i=1}^k e(i) \cdot \Delta t \quad (4.2)$$

$$\frac{de(t)}{dt} \cong \frac{e(k) - e(k-1)}{\Delta t} \quad (4.3)$$

Substituindo na equação (4.1) teremos:

$$\begin{aligned} m(k) &= K_c \cdot \left( e(k) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=1}^k e(i) \cdot \Delta t + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{\Delta t} \right) \\ m(k) &= K_c \cdot \left( e(k) + \frac{\Delta t}{T_i} [e(k) + e(k-1) + \dots + e(1)] + \frac{T_d}{\Delta t} [e(k) - e(k-1)] \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Onde:

- $e(k)$  é o valor do desvio no instante de amostragem  $k$
- $m(k)$  é o valor da saída do controlador no instante de amostragem  $k$
- $\Delta t$  é o intervalo de amostragem

Aplicando a transformada Z à equação acima teremos:

$$M(z) = K_c \cdot \left( E(z) + \frac{\Delta t}{T_i} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(k-1)}) \cdot E(z) + \frac{T_d}{\Delta t} (1 - z^{-1}) \cdot E(z) \right)$$

$$M(z) = K_c \cdot \left( 1 + \frac{\Delta t}{T_i} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(k-1)}) + \frac{T_d}{\Delta t} (1 - z^{-1}) \right) \cdot E(z)$$

Mas

$$(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(k-1)}) = \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

Então:

$$\begin{aligned} M(z) &= K_c \cdot \left( 1 + \frac{\Delta t}{T_i} \frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{T_d}{\Delta t} (1-z^{-1}) \right) \cdot E(z) \\ M(z) &= K_c \cdot \left( 1 + \frac{\Delta t}{T_i} \frac{z}{(z-1)} + \frac{T_d}{\Delta t} \frac{(z-1)}{z} \right) \cdot E(z) \end{aligned} \quad (4.5)$$

A equação (4.5) representa um algoritmo PID digital chamado de posicional, uma vez que a saída do controlador representa a posição final do elemento de controle.

Outro algoritmo muito usado é o incremental ou de velocidade, onde a saída do controlador representa o incremento a ser enviado para o elemento de controle.

Utilizando a expressão (4.4) podemos calcular o valor para  $m(k-1)$ :

$$m(k-1) = K_c \cdot \left( e(k-1) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \cdot \Delta t + T_d \frac{e(k-1) - e(k-2)}{\Delta t} \right)$$

Fazendo  $\Delta m(k) = m(k) - m(k-1)$  obteremos:

$$\Delta m(k) = K_c \cdot \left( e(k) - e(k-1) + \frac{\Delta t}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{\Delta t} (e(k) - 2 \cdot e(k-1) + e(k-2)) \right)$$

Aplicando a transformada Z na equação acima obteremos:

$$\Delta M(z) = K_c \cdot \left( E(z) - z^{-1} \cdot E(z) + \frac{\Delta t}{T_i} \cdot E(z) + \frac{T_d}{\Delta t} (E(z) - 2 \cdot z^{-1} \cdot E(z) + z^{-2} \cdot E(z)) \right) \quad (4.6)$$

A equação (4.6) representa o algoritmo PID incremental ou de velocidade.

#### **4.2. Aproximação bilinear ou método de Tustin ou Integração trapezoidal**

Neste método o termo integral é aproximado conforme a equação (4.7) abaixo e o termo derivativo conforme a expressão (4.3):

$$\int_0^t e(t)dt \approx \sum_{i=1}^k \left[ \frac{e(i) + e(i-1)}{2} \right] \cdot \Delta t \quad (4.7)$$

Substituindo a identidade acima e a equação (4.3) na equação (4.1) teremos:

$$\begin{aligned} m(k) &= K_c \cdot \left( e(k) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{e(i) + e(i-1)}{2} \right] \cdot \Delta t + \frac{T_d}{\Delta t} (e(k) - e(k-1)) \right) \\ m(k) &= K_c \cdot \left( e(k) + \frac{\Delta t}{2 \cdot T_i} [e(k) + 2 \cdot e(k-1) + \dots + 2 \cdot e(1) + e(0)] + \frac{T_d}{\Delta t} (e(k) - e(k-1)) \right) \end{aligned}$$

Aplicando a transformada Z na equação acima teremos:

$$\begin{aligned} M(z) &= K_c \cdot \left( E(z) + \frac{\Delta t}{2 \cdot T_i} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot E(z) + \frac{T_d}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot E(z) \right) \\ M(z) &= K_c \cdot \left( 1 + \frac{\Delta t}{2 \cdot T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{T_d}{\Delta t} \frac{z-1}{z} \right) \cdot E(z) \end{aligned} \quad (4.8)$$

A equação (4.8) representa o algoritmo PID digital, utilizando a aproximação bilinear, em seu formato posicional. O formato de velocidade pode ser obtido através de:

$$\Delta m(k) = m(k) - m(k-1)$$

$$\Delta m(k) = K_c \cdot \left( e(k) - e(k-1) + \frac{1}{T_i} \frac{e(k) + e(k-1)}{2} \cdot \Delta t + \frac{T_d}{\Delta t} (e(k) - 2 \cdot e(k-1) + e(k-2)) \right)$$

Aplicando a transformada Z na equação acima teremos:

$$\begin{aligned} \Delta M(Z) &= K_c \cdot \left( E(z) - z^{-1}E(z) + \frac{\Delta t}{2 \cdot T_i} (E(z) - z^{-1}E(z)) + \frac{T_d}{\Delta t} (E(z) - 2 \cdot z^{-1}E(z) + z^{-2}E(z)) \right) \\ \Delta M(Z) &= K_c \cdot \left( 1 - z^{-1} + \frac{\Delta t}{2 \cdot T_i} (1 - z^{-1}) + \frac{T_d}{\Delta t} (1 - 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \right) \cdot E(z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

### 4.3. O tempo de amostragem

Na escolha do tempo de amostragem os efeitos sobre as ações derivativa e integral devem ser considerados. Valores muito pequenos para  $\Delta t$  elevam a ação da componente derivativa podendo levar o controlador à saturação da saída e tornando a componente integral insensível.

Tipicamente o valor do tempo de amostragem deve ser menor do que 10% do valor da maior constante de tempo do sistema.

Antes de realizar a digitalização do sistema iremos determinar qual será o tempo de amostragem. Para tal, de posse das constantes de tempo dos dispositivos do sistema já calculadas anteriormente constatamos que a maior delas é  $\tau = 8,3333 \cdot 10^{-2}$ , pertencente à função de transferência do sistema de aquisição de dados, logo podemos determinar para o tempo de amostragem.

$$\Delta t < 0,1 \cdot 8,3333 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \Delta t < 8,3333 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{Adotaremos } \Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ [s]} \quad (4.10)$$

Para o tempo de amostragem determinado acima, a freqüência de amostragem será dada por:

$$\omega_s = \frac{2 \cdot \pi}{\Delta t} \rightarrow \omega_s = \frac{2 \cdot \pi}{1 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot \pi \cdot 10^3 \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (4.11)$$

#### 4.4. Função de transferência discreta em malha aberta

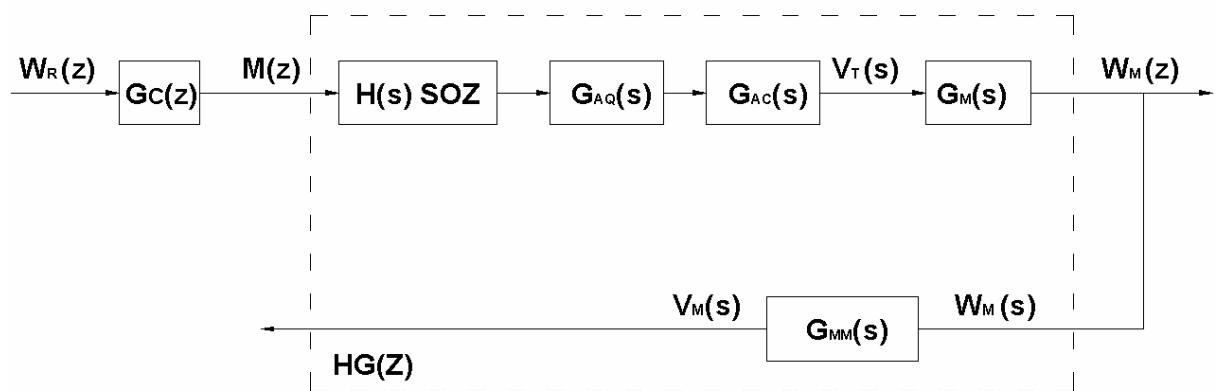


Figura 4.1 - Diagrama de Blocos Discreto em Malha Aberta

Utilizando o digrama de blocos da Figura 2.22, desprezando a componente de carga e ainda introduzindo um segurador de ordem zero  $H(s)$  obtém-se o diagrama de blocos discreto em malha aberta ilustrado na Figura 4.1. Inspecionando-o podemos definir:

$$HG(z) = Z \left| H(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s) \right| \quad (4.12)$$

A equação acima representa função de transferência discreta em malha aberta para o sistema. O segurador de ordem zero é o elemento responsável por manter a saída do controlador num valor constante, até que um novo valor seja calculado e enviado para saída, o que ocorre em cada um dos períodos de amostragem. A função de transferência do segurador é dada por:

$$H(s) = \frac{(1 - e^{-\Delta t \cdot s})}{s}$$

Substituindo a função de transferência do segurador de ordem zero e lembrando que a função de transferência do acionamento é representada apenas por um ganho ( $K_{AC}=12$ ) podemos escrever:

$$HG(z) = Z \left[ \frac{G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)}{s} \cdot (1 - e^{-\Delta t \cdot s}) \right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{G_{AQ}(s) \cdot K_{AC} \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)}{s} \right]$$

Finalmente substituindo as funções de transferência do sistema de aquisição de dados, acionamento, do motor e do medidor na equação acima teremos:

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{12 \cdot \frac{1,2}{(s+1,2)} \cdot \frac{5,0149 \cdot 10^7}{(s+7549,6) \cdot (s+142,72)} \cdot \frac{5,8714 \cdot 10^4}{(s+4,3229 \cdot 10^6)}}{s} \right]$$

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{4,24 \cdot 10^{13}}{s \cdot (s+1,2) \cdot (s+7549,6) \cdot (s+142,72) \cdot (s+4,3229 \cdot 10^6)} \right]$$

Expandindo o termo entre colchetes em frações parciais teremos:

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+1,2)} \frac{c}{(s+7549,6)} + \frac{d}{(s+142,72)} + \frac{e}{(s+4,3229 \cdot 10^6)} \right]$$

Onde:

$$a = \lim_{s \rightarrow 0} = \left| \frac{4,24 \cdot 10^{13} \cdot s}{s \cdot (s+1,2) \cdot (s+7549,6) \cdot (s+142,72) \cdot (s+4,3229 \cdot 10^6)} \right| = 7,5858$$

$$b = \lim_{s \rightarrow -1,2} = \left| \frac{4,24 \cdot 10^{13} \cdot (s + 1,2)}{s \cdot (s + 1,2) \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,72) \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6)} \right| = -7,6513$$

$$c = \lim_{s \rightarrow -7549,6} = \left| \frac{4,24 \cdot 10^{13} \cdot (s + 7549,6)}{s \cdot (s + 1,2) \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,72) \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6)} \right| = -2,3277 \cdot 10^{-5}$$

$$d = \lim_{s \rightarrow -142,72} = \left| \frac{4,24 \cdot 10^{13} \cdot (s + 142,72)}{s \cdot (s + 1,2) \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,72) \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6)} \right| = 0,065564$$

$$e = \lim_{s \rightarrow -4,3229 \cdot 10^6} = \left| \frac{4,24 \cdot 10^{13} \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6)}{s \cdot (s + 1,2) \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,72) \cdot (s + 4,3229 \cdot 10^6)} \right| = 1,2163 \cdot 10^{-13}$$

Então:

$$HG(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[ \frac{7,5858}{s} - \frac{7,6513}{(s + 1,2)} - \frac{2,3277 \cdot 10^{-5}}{(s + 7549,6)} + \frac{0,065564}{(s + 142,72)} + \frac{1,2163 \cdot 10^{-13}}{(s + 4,3229 \cdot 10^6)} \right]$$

Resolvendo a transformada Z teremos:

$$HG(z) = \frac{7,5858 \cdot (1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})} - \frac{7,6513 \cdot (1 - z^{-1})}{(1 - e^{-1,2 \cdot \Delta t} \cdot z^{-1})} - \frac{2,3277 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - z^{-1})}{(1 - e^{-7549,6 \cdot \Delta t} \cdot z^{-1})} + \frac{0,065564 \cdot (1 - z^{-1})}{(1 - e^{-142,72 \cdot \Delta t} \cdot z^{-1})} + \dots \\ \dots + \frac{1,2163 \cdot 10^{-13} \cdot (1 - z^{-1})}{(1 - e^{-4,3229 \cdot 10^6 \cdot \Delta t} \cdot z^{-1})}$$

Substituindo o valor do tempo de amostragem e resolvendo as exponenciais a equação acima fica:

$$HG(z) = \frac{7,5858 \cdot (z - 1)}{(z - 1)} - \frac{7,6513 \cdot (z - 1)}{(z - 0,9988)} - \frac{2,3277 \cdot 10^{-5} \cdot (z - 1)}{(z - 5,2632 \cdot 10^{-4})} + \frac{0,065564 \cdot (z - 1)}{(z - 0,867)} + \dots \\ \dots + \frac{1,2163 \cdot 10^{-13} \cdot (z - 1)}{z \cdot (1 - 0)}$$

$$HG(z) = \frac{7,5858 \cdot z - 1,2163 \cdot 10^{-13}}{z} - \frac{7,6513 \cdot (z-1)}{(z - 0,9988)} - \frac{2,3277 \cdot 10^{-5} \cdot (z-1)}{(z - 5,2632 \cdot 10^{-4})} + \frac{0,065564 \cdot (z-1)}{(z - 0,867)}$$

$$HG(z) = \frac{7,5858 \cdot z - 1,2163 \cdot 10^{-13}}{z} - \frac{7,6513 \cdot (z-1)}{z - 0,9988} - \frac{2,3277 \cdot 10^{-5} \cdot (z-1)}{z - 5,2632 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,065564 \cdot (z-1)}{z - 0,867}$$

Finalmente, a função de transferência desejada é dada pela expressão abaixo:

$$HG(z) = \frac{4,072 \cdot 10^{-5} \cdot z^4 + 4,088 \cdot 10^{-4} \cdot z^3 + 7,408 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 + 1,973 \cdot 10^{-5} \cdot z + 5,544 \cdot 10^{-17}}{z^4 - 1,8663 \cdot z^3 + 0,8669 \cdot z^2 - 4,5577 \cdot 10^{-4} \cdot z} \quad (4.13)$$

Um resultado aproximado pode ser obtido utilizando o comando “c2d” do MATLAB®. A lista abaixo mostra os comandos utilizados para digitalizar a função de transferência em malha aberta do motor, sistema de aquisição e acionamento:

```

clear
clc
format short g
format compact
%Funcao de transferencia em tempo continuo do motor
    Num1=5.0149e7;
    Den1=conv([1 7549.6],[1 142.72]);
    Gm=tf(Num1,Den1);
%Funcao de transferencia do tacogenerator
    Num2=5.8714e4;
    Den2=[1 4.3229e6];
    Gmm=tf(Num2,Den2);
%Funcao de transferencia do acionamento
    Kac=12;
%Funcao de transferencia do sistema de aquisição de dados
    Num3=1.2;
    Den3=[1 1.2];
    Gaq=tf(Num3,Den3);
%Funcao de transferencia em malha aberta
Gma=Kac*Gaq*Gm*Gmm;
%Funcao de transferencia discreta em malha aberta
dT=1e-3;
Gmaz=c2d(Gma,dT,'zoh')
```

Abaixo segue o resultado obtido com o MATLAB®.

Transfer function :

$$0.0004791 z^3 + 0.0007105 z^2 + 1.975e-005 z + 5.544e-017$$

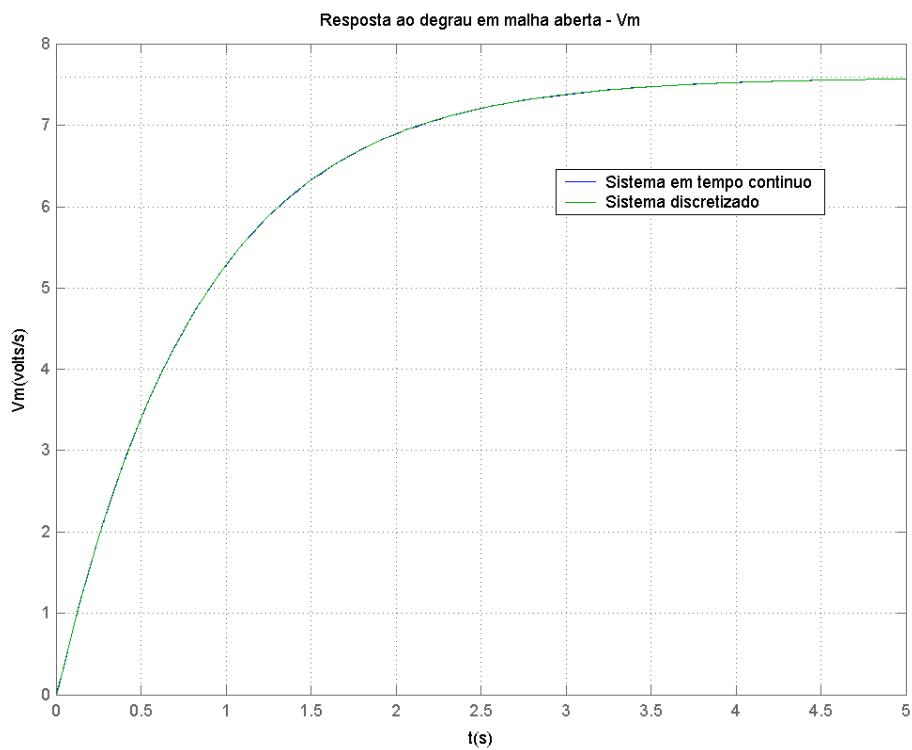
$$-----$$

$$z^4 - 1.866 z^3 + 0.8669 z^2 - 0.0004558 z + 7.755e-022$$

Sampling time : 0.001

Realizando uma simulação, obtivemos o gráfico da Figura 4.2, o qual ilustra as respostas ao degrau unitário em malha aberta, para o sistema digitalizado e para o sistema em tempo contínuo.

Observamos que as respostas são semelhantes, apresentando as mesmas características estáticas (ganho e constante de tempo), exceto pelo formato “em escada” da resposta do sistema digitalizado.



**Figura 4.2 - Resposta ao degrau unitário em malha aberta**

#### 4.5. Função de transferência discreta em malha fechada

Inspecionando o diagrama de blocos da Figura 4.3 podemos escrever a equação que relaciona a variação total da velocidade em função do valor de referência:

$$\frac{W_m(z)}{W_R(z)} = \frac{K_{MM} \cdot G_C(z) \cdot Z[H(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s)]}{1 + G_C(z) \cdot Z[H(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s)]} = \frac{K_{MM} \cdot G_C(z) \cdot HG_{AQ}G_{AC}G_M(z)}{1 + G_C(z) \cdot HG(z)}$$

(4.14)

Onde  $H(s)$  é a função de transferência do segurador de ordem zero.

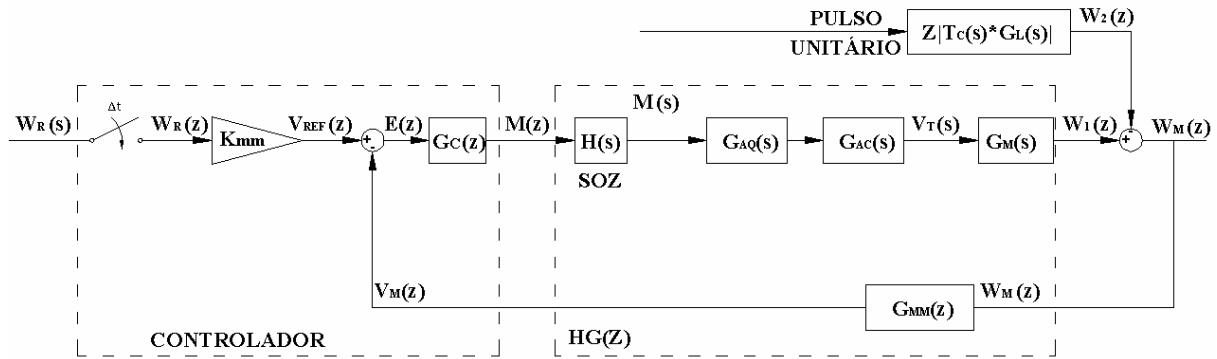


Figura 4.3 - Malha de controle digital por realimentação

A equação característica do sistema em tempo discreto é dada por:

$$A(z) = 1 + G_C(z) \cdot HG(z) = 0 \quad (4.15)$$

#### 4.6. Função de transferência discreta da carga

A discretização da função de transferência da carga engloba o sinal de entrada (rampa, degrau, etc.) com a função de transferência continua da carga (equação 2.27). Neste caso o sinal de entrada passa a ser um pulso unitário.

Supondo então uma variação em degrau unitário como sinal de entrada, teríamos:

$$G_L T_C(z) = z[G_L(s) \cdot T_C(s)] = z \left[ \frac{-(1,523 \cdot 10^5 \cdot s + 1,172 \cdot 10^9)}{s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{s} \right]$$

$$G_L T_C(z) = z \left[ \frac{-(1,523 \cdot 10^5 \cdot s + 1,172 \cdot 10^9)}{s \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,79)} \right]$$

$$G_L T_C(z) = z \left[ \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 7549,6} + \frac{C}{s + 142,79} \right]$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-(1,523 \cdot 10^5 \cdot s + 1,172 \cdot 10^9)}{s \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,79)} \cdot s = -1087,2$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -7549,6} \frac{-(1,523 \cdot 10^5 \cdot s + 1,172 \cdot 10^9)}{s \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,79)} (s + 7549,6) = -0,39693$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -142,79} \frac{-(1,523 \cdot 10^5 \cdot s + 1,172 \cdot 10^9)}{s \cdot (s + 7549,6) \cdot (s + 142,79)} (s + 142,79) = 1087,6$$

$$G_L T_C(z) = z \left[ -\frac{1087,2}{s} - \frac{0,39693}{(s + 7549,6)} + \frac{1087,6}{(s + 142,79)} \right] = -\frac{1087,2}{1 - z^{-1}} - \frac{0,39693}{1 - e^{-7549,6 \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}} + \frac{1087,6}{1 - e^{-142,79 \cdot \Delta t} \cdot z^{-1}}$$

$$G_L T_C(z) = -\frac{1087,2}{1 - z^{-1}} - \frac{0,39693}{1 - 0,47003 \cdot z^{-1}} + \frac{1087,6}{1 - 0,98583 \cdot z^{-1}} = -\frac{1087,2 \cdot z}{z - 1} - \frac{0,39693 \cdot z}{z - 0,47003} + \frac{1087,6 \cdot z}{z - 0,98583}$$

$$G_L T_C(z) = \frac{-0,3969 \cdot z^3 - 14,62 \cdot z^2 + 6,852 \cdot z}{z^3 - 2,456 \cdot z^2 + 1,919 \cdot z - 0,4634}$$

#### 4.7. Análise de estabilidade

Analizando a equação característica poderemos determinar a estabilidade do sistema em malha fechada em função do ganho do controlador.

Substituindo (4.13) em (4.15) e teremos:

$$A(z) = 1 + G_c(z) \cdot \frac{4,072 \cdot 10^{-5} \cdot z^4 + 4,088 \cdot 10^{-4} \cdot z^3 + 7,408 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 + 1,973 \cdot 10^{-5} \cdot z + 5,544 \cdot 10^{-17}}{z^4 - 1,8663 \cdot z^3 + 0,8669 \cdot z^2 - 4,5577 \cdot 10^{-4} \cdot z} = 0$$

Para determinarmos o ganho crítico do sistema iremos utilizar o critério modificado de Routh. Para tal é necessário reescrever a equação característica do servossistema no seguinte formato:

$$A(z) = a_0 \cdot z^4 + a_1 \cdot z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z + a_4 = 0 \quad (4.16)$$

Assumindo que a função de transferência do controlador seja dada apenas por um ganho e simplificando-a, teremos os coeficientes da equação (4.16):

$$A(z) = 1 + \frac{K_c \cdot (4,072 \cdot 10^{-5} \cdot z^4 + 4,088 \cdot 10^{-4} \cdot z^3 + 7,408 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 + 1,973 \cdot 10^{-5} \cdot z + 5,544 \cdot 10^{-17})}{z^4 - 1,8663 \cdot z^3 + 0,8669 \cdot z^2 - 4,5577 \cdot 10^{-4} \cdot z} = 0$$

$$A(z) = z^4 - 1,8663 \cdot z^3 + 0,8669 \cdot z^2 - 4,5577 \cdot 10^{-4} \cdot z + \dots \\ \dots + K_c \cdot (4,072 \cdot 10^{-5} \cdot z^4 + 4,088 \cdot 10^{-4} \cdot z^3 + 7,408 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 + 1,973 \cdot 10^{-5} \cdot z + 5,544 \cdot 10^{-17}) = 0$$

$$A(z) = z^4 + 4,072 \cdot 10^{-5} \cdot K_c \cdot z^4 + 4,088 \cdot 10^{-4} \cdot K_c \cdot z^3 - 1,8663 \cdot z^3 + 0,8669 \cdot z^2 + 7,408 \cdot 10^{-4} \cdot K_c \cdot z^2 \dots \\ \dots + 1,973 \cdot 10^{-5} \cdot K_c \cdot z - 4,5577 \cdot 10^{-4} \cdot z + 5,544 \cdot 10^{-17} \cdot K_c = 0$$

$$A(z) = (4,072 \cdot 10^{-5} \cdot K_c + 1) \cdot z^4 + (4,088 \cdot 10^{-4} \cdot K_c - 1,8663) \cdot z^3 + (7,408 \cdot 10^{-4} \cdot K_c + 0,8669) \cdot z^2 \dots \\ \dots + (1,973 \cdot 10^{-5} \cdot K_c - 4,5577 \cdot 10^{-4}) \cdot z + 5,544 \cdot 10^{-17} \cdot K_c = 0$$

$$\begin{cases} a_0 = 4,072 \cdot 10^{-5} \cdot K_c + 1 \\ a_1 = 4,088 \cdot 10^{-4} \cdot K_c - 1,8663 \\ a_2 = 7,408 \cdot 10^{-4} \cdot K_c + 0,8669 \\ a_3 = 1,973 \cdot 10^{-5} \cdot K_c - 4,5577 \cdot 10^{-4} \\ a_4 = 5,544 \cdot 10^{-17} \cdot K_c \end{cases}$$

O método modificado de Routh requer a transformação do plano complexo  $z$  em outro plano complexo chamado  $w$  através de uma transformação bilinear definida por:

$$z = \frac{(w+1)}{(w-1)} \quad (4.17)$$

Após a realização da transformação é possível utilizar os critérios de Routh da mesma forma que no tempo contínuo. Fazendo a substituição em (4.16) teremos:

$$A(w) = a_0 \cdot \left( \frac{w+1}{w-1} \right)^4 + a_1 \cdot \left( \frac{w+1}{w-1} \right)^3 + a_2 \cdot \left( \frac{w+1}{w-1} \right)^2 + a_3 \cdot \left( \frac{w+1}{w-1} \right) + a_4 = 0$$

$$A(w) = \frac{a_0 \cdot (w+1)^4 + a_1 \cdot (w+1)^3 \cdot (w-1) + a_2 \cdot (w+1)^2 \cdot (w-1)^2 + a_3 \cdot (w+1) \cdot (w-1)^3 + a_4 \cdot (w-1)^4}{(w-1)^4} = 0$$

Rearranjando a equação acima teremos:

$$A_0 \cdot w^4 + A_1 \cdot w^3 + A_2 \cdot w^2 + A_3 \cdot w + A_4 = 0$$

$$\text{Onde: } \begin{cases} A_0 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 1,2101 \cdot 10^{-3} \cdot K_C + 1,4423 \cdot 10^{-4} \\ A_1 = (4 \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 - 2 \cdot a_3 - 4 \cdot a_4) = 9,4102 \cdot 10^{-4} \cdot K_C + 0,26831 \\ A_2 = (6 \cdot a_0 - 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_4) = -1,2373 \cdot 10^{-3} \cdot K_C + 4,2662 \\ A_3 = (4 \cdot a_0 - 2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_3 - 4 \cdot a_4) = -6,1526 \cdot 10^{-4} \cdot K_C + 7,7317 \\ A_4 = (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4) = 3,5299 \cdot 10^{-4} \cdot K_C + 3,7337 \end{cases}$$

De posse dos dados acima podemos então preparar o arranjo tabular de Routh.

O critério de Routh afirma que a condição necessária para que todas as raízes da equação característica fiquem no semiplano da esquerda do plano  $s$ , ou seja, para que o sistema seja estável, é que todos os coeficientes da equação característica sejam positivos e todos os termos da primeira coluna do arranjo tabular sejam positivos. O raciocínio é equivalente para o método modificado de Routh aplicado a sistemas

discretos, onde se todos os coeficientes da equação característica forem positivos e todos os termos da primeira coluna forem positivos então todos os pólos estarão localizados dentro de um círculo unitário.

**Tabela 4.1 - Arranjo tabular de Routh**

$w^4$	$A_0$	$A_2$	$A_4$
$w^3$	$A_1$	$A_3$	$A_5 = 0$
$w^2$	$B_1 = \frac{A_1 \cdot A_2 - A_0 \cdot A_3}{A_1}$	$B_2 = \frac{A_1 \cdot A_4 - A_0 \cdot A_5}{A_1} = A_4$	$B_3 = 0$
$w$	$C_1 = \frac{B_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot B_2}{B_1} = \frac{B_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_4}{B_1}$	$C_2 = 0$	$C_3 = 0$
$w^0$	$D_1 = \frac{C_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot C_2}{C_1} = B_2$	$D_2 = 0$	$D_3 = 0$

Resumindo as condições acima teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 > 0 \Rightarrow 1,2101 \cdot 10^{-3} \cdot K_c + 1,4423 \cdot 10^{-4} > 0 \Rightarrow K_c > -0,11919 \\ A_1 > 0 \Rightarrow 9,4102 \cdot 10^{-4} \cdot K_c + 0,26831 > 0 \Rightarrow K_c > -2,8513 \cdot 10^2 \\ B_1 > 0 \Rightarrow \frac{A_1 \cdot A_2 - A_0 \cdot A_3}{A_1} > 0 \Rightarrow A_1 \cdot A_2 - A_0 \cdot A_3 > 0 \Rightarrow -1,3712 \cdot 10^4 < K_c < 198,66 \\ C_1 > 0 \Rightarrow \frac{B_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_4}{B_1} > 0 \Rightarrow B_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_4 > 0 \Rightarrow K_c > -3,8282 \cdot 10^4, K_c > -2,1114 \cdot 10^4 \\ D_1 > 0 \Rightarrow 3,5299 \cdot 10^{-4} \cdot K_c + 3,7337 > 0 \Rightarrow K_c > -1.0577 \cdot 10^4 \end{array} \right.$$

Considerando apenas os valores positivos o sistema será estável para os valores do ganho compreendidos no intervalo  $0 < K_c < 198,66$ .

O ganho crítico do controlador que levará o sistema, no limiar da estabilidade, a oscilar continuamente será  $K_{cu} = 198,66$ .

Substituindo este valor na equação característica do sistema e fazendo as simplificações necessárias obteremos:

$$A(z) = 1 + 198,66 \cdot \frac{4,072 \cdot 10^{-5} \cdot z^4 + 4,088 \cdot 10^4 \cdot z^3 + 7,408 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 + 1,973 \cdot 10^{-5} \cdot z + 5,544 \cdot 10^{-17}}{z^4 - 1,8663 \cdot z^3 + 0,8669 \cdot z^2 - 4,5577 \cdot 10^{-4} \cdot z} = 0$$

$$A(z) = 1,008 \cdot z^4 - 1,785 \cdot z^3 + 1,014 \cdot z^2 + 0,003464 \cdot z + 1,101 \cdot 10^{-14} = 0$$

Cujas raízes são: 
$$\begin{cases} A1 = -7,6777 \\ A2 = -2,3341 \\ A3 = -0,027 \\ A4 = -2,8092 \cdot 10^{-12} \end{cases}$$

Dentre as soluções obtidas não é possível definir qual é o período crítico. Para isto utilizaremos o diagrama do lugar das raízes do sistema.

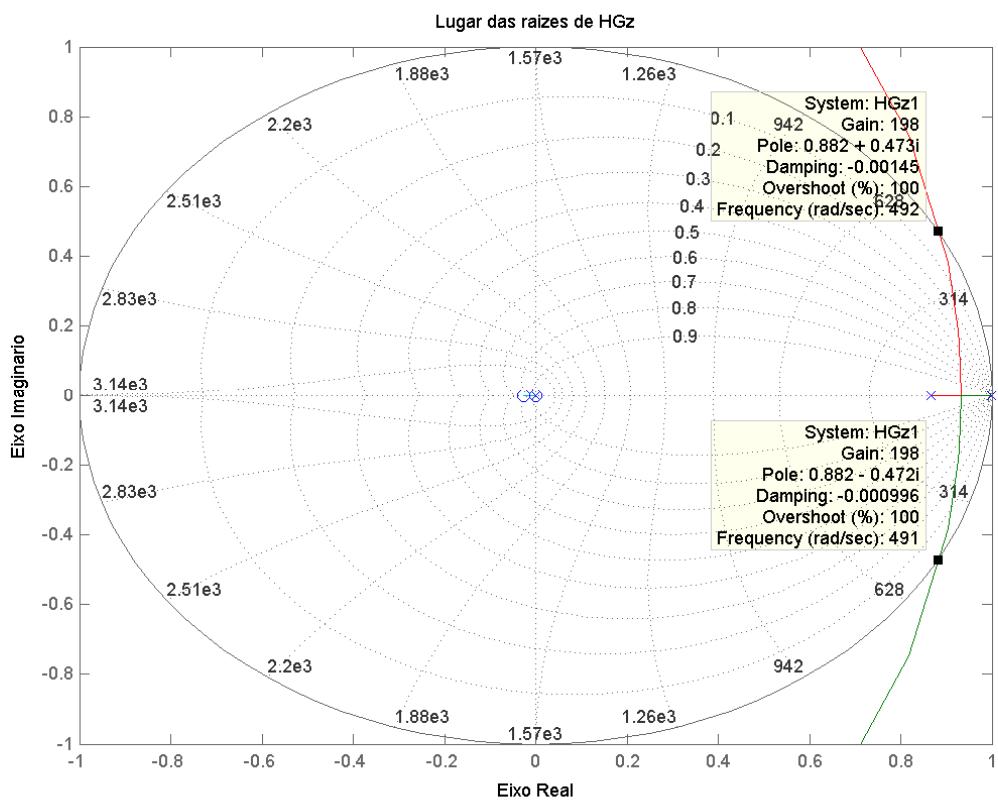


Figura 4.4 - Diagrama do lugar das raízes para o sistema discreto

A Figura 4.4 ilustra o diagrama do lugar das raízes obtido com o auxilio do MATLAB®. Nele podemos confirmar os valores calculados acima. Podemos verificar que para o ganho crítico calculado, as raízes da equação característica estão sobre o círculo de raio unitário, o que define o limite de estabilidade do sistema.

Analizando o lugar das raízes verificamos que a frequência crítica é igual a  $\omega_2 = 491 \text{ rad/s}$ .

Logo o período crítico será dado por:

$$P_u = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \Rightarrow P_u = 0,012797 \text{ [s]}$$

#### **4.8. Métodos de sintonia e projeto de controladores PID digitais**

Várias técnicas estão disponíveis para sintonia e projeto de controladores PID digitais.

Podemos realizar o projeto de controladores PID digitais utilizando os mesmos métodos propostos por Ziegler-Nichols já utilizados anteriormente para controladores analógicos, ou seja, utilizando relações de ajuste baseadas em modelos do processo.

Outra abordagem é a emulação ou substituição direta dos parâmetros de controladores projetados no domínio do tempo, nos algoritmos dos controladores digitais. Se o valor do tempo de amostragem for suficientemente pequeno em relação ao tempo de resposta do sistema, o controlador digital apresentará uma resposta semelhante ao controlador que o originou (GARCIA, 2001).

A desvantagem da substituição direta ou emulação é o fato do atraso na resposta gerado pelo seguidor de ordem zero, não ser levado em consideração no projeto dos controladores analógicos, levando então a uma degradação da resposta do controlador digital derivado. Para minimizar a degradação um atraso equivalente à metade do tempo de amostragem é inserido na malha de controle.

#### 4.8.1. Método das oscilações continuas de Ziegler-Nichols

De forma análoga à realizada para o controlador analógico, os parâmetros do controlador digital podem ser obtidos através das relações de sintonia desenvolvidas por Ziegler-Nichols apresentadas na Tabela 3.1.

A tabela abaixo apresenta os valores obtidos em função do ganho e período críticos do sistema discreto calculados anteriormente utilizando o método das oscilações continuas.

**Tabela 4.2 – Valores dos parâmetros de sintonia para os controladores digitais**

Controlador	$K_C$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	99,33	-	-
<b>PI</b>	89,397	0,01066	-
<b>PD</b>	119,196	-	0,0016
<b>PID</b>	119,196	0,0064	0,0016

Abaixo apresentamos os controladores sintonizados pelo método de Ziegler-Nichols, utilizando o algoritmo posicional desenvolvido através da integração retangular para trás e da integração trapezoidal.

$$G_{CD1} = 119,196 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot z}{0,0064 \cdot (z-1)} + \frac{0,0016 \cdot (z-1)}{1 \cdot 10^{-3} \cdot z} \right) \quad (\text{integração retangular})$$

$$G_{CD2} = 119,196 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (z+1)}{0,0128 \cdot (z-1)} + \frac{0,0016 \cdot (z-1)}{1 \cdot 10^{-3} \cdot z} \right) \quad (\text{integração trapezoidal})$$

$$G_{CD3} = 89,37 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot z}{0,01066 \cdot (z-1)} \right) \quad (\text{integração retangular})$$

$$G_{CD4} = 89,37 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (z+1)}{0,02132 \cdot (z-1)} \right) \quad (\text{integração trapezoidal})$$

$$G_{CD5} = 119,196 \cdot \left( 1 + \frac{0,0016 \cdot (z-1)}{1 \cdot 10^{-3} \cdot z} \right)$$

$$G_{CD6} = 99,33$$

#### 4.8.2. Projeto por emulação

O projeto de controladores digitais por emulação considera a discretização, através dos métodos apresentados anteriormente (integração retangular ou trapezoidal), dos controladores projetados no tempo contínuo, levando em consideração o atraso causado pelo segurador de ordem zero, que efetivamente introduz um atraso na malha de controle.

O comportamento dinâmico do segurador de ordem zero pode ser aproximado por um tempo morto igual à metade do tempo de amostragem (GARCIA, 2001), logo a função de transferência do processo considerada para os procedimentos de projeto e posterior sintonia dos controladores, será dada por:

$$G_M(s) = G_M(s) \cdot e^{-\left(\frac{\Delta t}{2}\right)s}$$

Utilizando a aproximação  $e^{-\theta_p \cdot s} \cong 1 - \theta_p \cdot s$  para o termo morto teremos:

$$G_M(s) = G_M(s) \cdot \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot s \right) = \frac{-2507,5 \cdot s + 5,0149 \cdot 10^7}{(s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6)}$$

Substituiremos a relação acima no lugar da função de transferência da MCC na equação (2.33), função de transferência em malha fechada do sistema, obtendo então:

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = \frac{K_{MM} \cdot G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot s\right)}{1 + G_C(s) \cdot G_{AQ}(s) \cdot G_{AC}(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{MM}(s) \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot s\right)} \quad (4.18)$$

A equação (4.18) representa a função de transferência em malha fechada da MCC levando em conta os efeitos do segurador de ordem zero.

Determinaremos a seguir os valores do período e ganho crítico para calcularmos os novos parâmetros de sintonia através do método das oscilações contínuas de Ziegler-Nichols e então substituí-los diretamente nos algoritmos PID digitais.

Substituindo as funções de transferência de cada dispositivo além do tempo de amostragem teremos:

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = \frac{0,013582 \cdot G_C(s) \cdot \frac{1,2}{(s+1,2)} \cdot 12 \cdot \frac{5,0149 \cdot 10^7 \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-4} \cdot s)}{(s^2 + 7692,4 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6)}}{1 + G_C(s) \cdot \frac{1,2}{(s+1,2)} \cdot 12 \cdot \frac{5,0149 \cdot 10^7 \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-4} \cdot s)}{(s^2 + 7,6924 \cdot 10^3 \cdot s + 1,078 \cdot 10^6)} \cdot \frac{5,8714 \cdot 10^4}{s + 4,3229 \cdot 10^6}}$$

$$\frac{W_1(s)}{W_R(s)} = \frac{G_C(s) \cdot \frac{9,8082 \cdot 10^6 - 4,9041 \cdot 10^3 \cdot s}{(s^3 + 7693,6 \cdot s^2 + 1,0872 \cdot 10^6 \cdot s + 1,2936 \cdot 10^6)}}{1 + G_C(s) \cdot \frac{(4,24 \cdot 10^{13} - 2,12 \cdot 10^{10} \cdot s)}{s^4 + 4,331 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + 4,698 \cdot 10^{12} \cdot s + 5,589 \cdot 10^{12}}} \quad (4.19)$$

O denominador da equação (4.19) representa a equação característica da função de transferência em malha fechada.

$$A(s) = 1 + G_C(s) \cdot \frac{-2,12 \cdot 10^{10} \cdot s + 4,24 \cdot 10^{13}}{s^4 + 4,331 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + 4,698 \cdot 10^{12} \cdot s + 5,589 \cdot 10^{12}} = 0 \quad (4.20)$$

Considerando que o controlador possua apenas a ação proporcional podemos escrever:

$$A(s) = s^4 + 4,331 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + (4,698 \cdot 10^{12} - 2,12 \cdot 10^{10} \cdot K_C) \cdot s + \dots \quad (4.21)$$

$$\dots + 5,589 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_C = 0$$

Podemos verificar que a equação característica possui o seguinte formato:

$$A(s) = a_0 \cdot s^4 + a_1 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s + a_4 = 0$$

Comparando a equação (4.21) com a equação acima teremos os seguintes valores para os coeficientes:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 4,331 \cdot 10^6 \\ a_2 = 3,326 \cdot 10^{10} \\ a_3 = 4,698 \cdot 10^{12} - 2,12 \cdot 10^{10} \cdot K_C \\ a_4 = 5,589 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_C \end{cases}$$

Preparando o arranjo tabular de Routh, com auxílio da Já temos os valores de  $a_0$  e  $a_1$ , que são positivos, restando calcular  $b_1$ ,  $c_2$  e  $d_1$ , que deverão ser positivos também. Calculando  $b_1$  e  $b_2$  teremos:

Tabela 2.4, poderemos então calcular o novo ganho crítico limite para estabilidade do sistema em malha fechada, que manterá o sistema em oscilações continuas, necessário para determinar os valores dos parâmetros de sintonia dos controladores.

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} = \frac{4,3306 \cdot 10^6 \cdot 3,326 \cdot 10^{10} - 1 \cdot (4,7 \cdot 10^{12} - 2,12 \cdot 10^{10} \cdot K_C)}{4,3306 \cdot 10^6}$$

$$b_1 = \frac{1,4403 \cdot 10^{17} + 2,12 \cdot 10^{10} \cdot K_C}{4,3306 \cdot 10^6} = 3,3259 \cdot 10^{10} + 4894,9 \cdot K_C \Rightarrow b_1 > -6.7945 \cdot 10^6$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_1} =$$

$$= \frac{(3,3259 \cdot 10^{10} + 4895 \cdot K_C) \cdot (4,7 \cdot 10^{12} - 2,12 \cdot 10^{10} \cdot K_C) - 4,3306 \cdot 10^{16} \cdot (5,5921 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot K_C)}{3,3259 \cdot 10^{10} + 4895 \cdot K_C}$$

$$c_1 = \frac{-1,0377 \cdot 10^{14} \cdot K_c^2 - 8,887 \cdot 10^{20} \cdot K_C + 1,5623 \cdot 10^{23}}{3,3259 \cdot 10^{10} + 4895 \cdot K_C} > 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 > -8,5642 \cdot 10^6 \\ C_1 > 175,79 \end{cases}$$

$$d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2}{c_1} = b_2 = a_4 > 0 \Rightarrow a_4 > -0,13182$$

Considerando apenas a faixa positiva dos valores teremos então que o ganho crítico do sistema será  $K_{CU}=175,79$ .

Substituindo o valor do ganho crítico na equação característica (4.21) e a identidade  $s=j\cdot\omega$  podemos então calcular o período crítico:

$$A(s) = s^4 + 4,331 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + (4,698 \cdot 10^{12} - 2,12 \cdot 10^{10} \cdot 175,79) \cdot s + \dots$$

$$\dots + 5,589 \cdot 10^{12} + 4,24 \cdot 10^{13} \cdot 175,79 = 0$$

$$A(s) = s^4 + 4,331 \cdot 10^6 \cdot s^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot s^2 + 9,7125 \cdot 10^{11} \cdot s + 7,4591 \cdot 10^{15} = 0$$

$$A(j \cdot \omega) = (j \cdot \omega)^4 + 4,331 \cdot 10^6 \cdot (j \cdot \omega)^3 + 3,326 \cdot 10^{10} \cdot (j \cdot \omega)^2 + 9,7125 \cdot 10^{11} \cdot (j \cdot \omega) + 7,4591 \cdot 10^{15} = 0$$

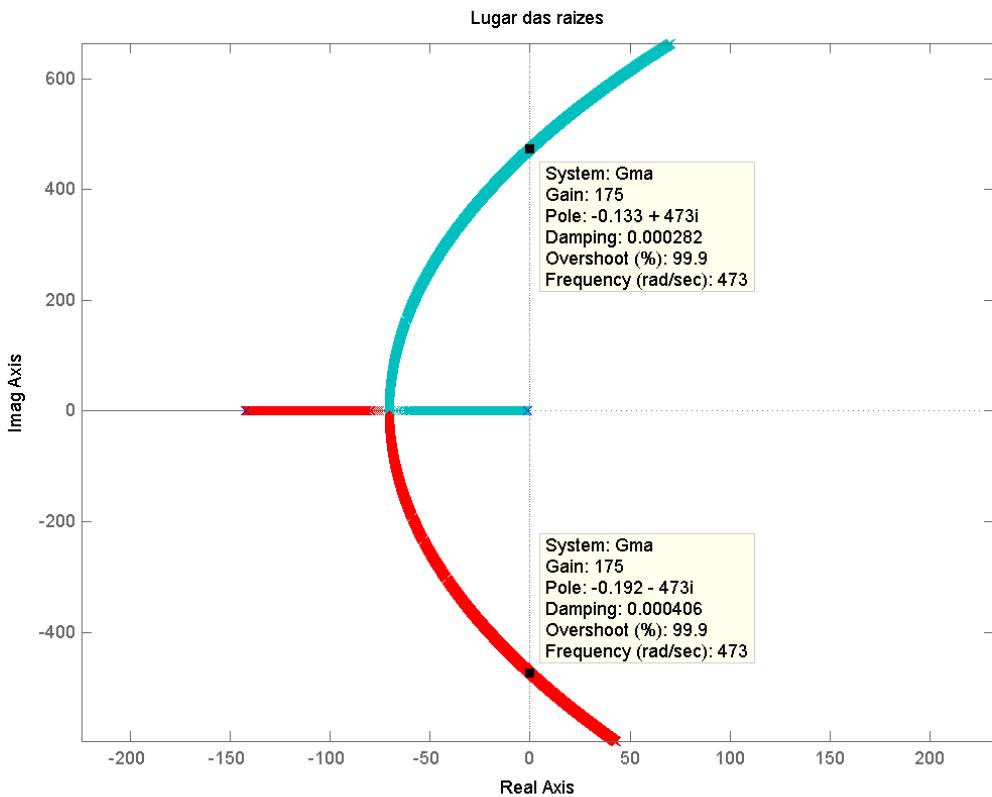
$$\omega^4 - 4,331 \cdot 10^6 \cdot j \cdot \omega^3 - 3,326 \cdot 10^{10} \cdot \omega^2 + 9,7125 \cdot 10^{11} \cdot j \cdot \omega + 7,4591 \cdot 10^{15} = 0$$

$$\omega^4 - 3,326 \cdot 10^{10} \cdot \omega^2 + 7,4591 \cdot 10^{15} + (9,7125 \cdot 10^{11} \cdot \omega - 4,331 \cdot 10^6 \cdot \omega^3) \cdot j = 0$$

Para que a identidade acima seja verdadeira tanto a parte real quanto a parte imaginária devem ser nulas, então:

$$\begin{cases} \text{Im} : 9,7125 \cdot 10^{11} \cdot \omega - 4,331 \cdot 10^6 \cdot \omega^3 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0; \quad \omega_{2,3} = \pm 473,56 \\ \text{Re} : \omega^4 - 3,326 \cdot 10^{10} \cdot \omega^2 + 7,4591 \cdot 10^{15} = 0 \Rightarrow \omega_{4,5} = \pm 1,8273 \cdot 10^5; \omega_{6,7} = \pm 473,56 \end{cases}$$

Como obtivemos dois valores positivos distintos utilizamos o diagrama do lugar das raízes para determinar o período critico:



**Figura 4.5 - Gráfico do lugar das raízes**

A Figura 4.5 apresenta uma ampliação do gráfico do lugar das raízes do sistema, obtido com a utilização do Matlab<sup>®</sup>, confirmando o valor obtido para o ganho limite e ainda apresentando o valor para o período crítico.

De posse da freqüência  $\omega_U=473,56$  (rad/s) podemos então calcular o período critico como segue:

$$P_U = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_U} = \frac{2 \cdot \pi}{473,56} \Rightarrow P_U = 0,013268 \quad [s]$$

Os parâmetros de sintonia para os controladores analógicos podem ser calculados pelas relações desenvolvidas por Ziegler-Nichols, apresentadas na Tabela 3.1. A Tabela 4.3 apresenta os resultados obtidos.

**Tabela 4.3 – Valores dos parâmetros de sintonia**

<b>Controlador</b>	<b>K<sub>C</sub></b>	<b>T<sub>i</sub></b>	<b>T<sub>d</sub></b>
<b>P</b>	87,895	-	-
<b>PI</b>	79,105	0,011057	-
<b>PD</b>	105,47	-	0,0016585
<b>PID</b>	105,47	0,006634	0,0016585

Os parâmetros acima foram substituídos nas equações discretizadas dos controladores PID, no formato posicional e os seguintes controladores foram obtidos:

$$G_{CD7} = 105,47 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot z}{0,006634 \cdot (z-1)} + \frac{0,0016585 \cdot (z-1)}{1 \cdot 10^{-3} \cdot z} \right) \quad (\text{integração retangular})$$

$$G_{CD8} = 105,47 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (z+1)}{0,013268 \cdot (z-1)} + \frac{0,0016585 \cdot (z-1)}{1 \cdot 10^{-3} \cdot z} \right) \quad (\text{integração trapezoidal})$$

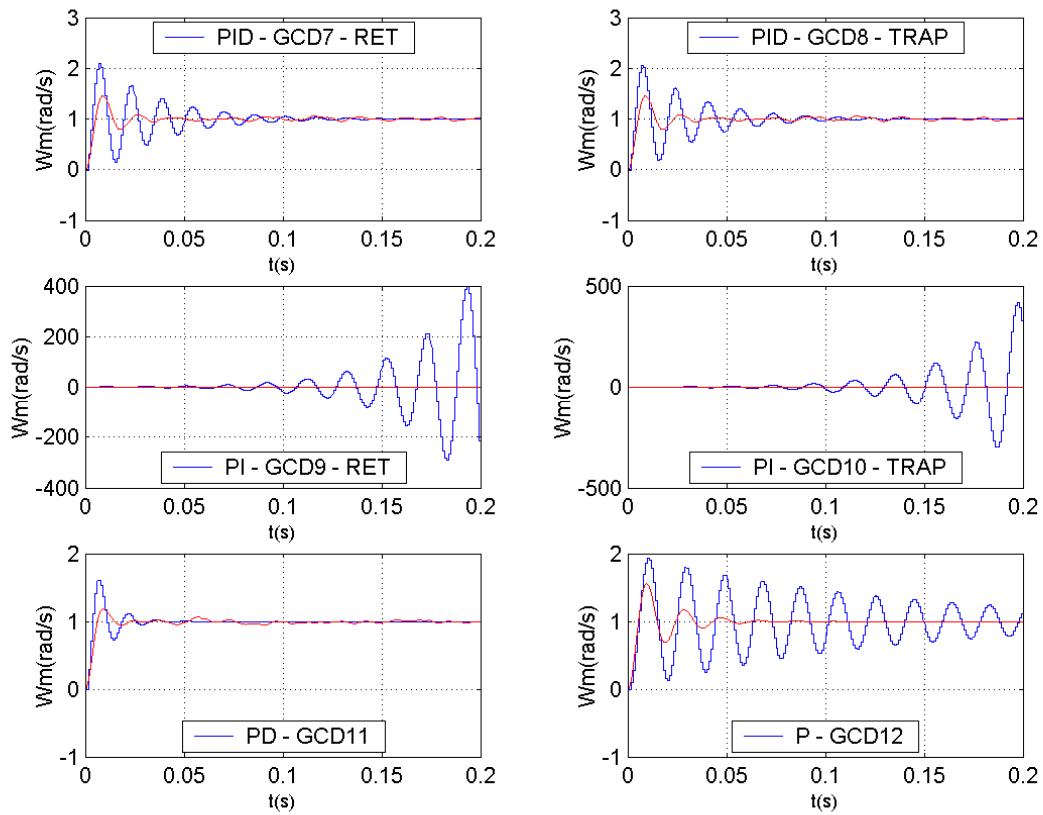
$$G_{CD9} = 79,105 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot z}{0,011057 \cdot (z-1)} \right) \quad (\text{integração retangular})$$

$$G_{CD10} = 79,105 \cdot \left( 1 + \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (z+1)}{0,022114 \cdot (z-1)} \right) \quad (\text{integração trapezoidal})$$

$$G_{CD11} = 105,47 \cdot \left( 1 + \frac{0,0016585 \cdot (z-1)}{1 \cdot 10^{-3} \cdot z} \right)$$

$$G_{CD12} = 87,895$$

A Figura 4.6 apresenta a resposta ao degrau unitário dos controladores projetados por emulação comparada com a resposta dos controladores analógicos originais. Podemos verificar que os controladores digitais PI levaram o sistema a instabilidade, o controlador P apresentou desempenho muito inferior ao controlador que lhe deu origem e os controladores PID e PD apresentaram sobre-sinal levemente superior aos controladores que lhes deram origem.



**Figura 4.6 - Resposta ao degrau dos controladores digitais emulados**

## 4.9. Comparação dos controladores Digitais

De forma análoga aos controladores analógicos submetemos os controladores digitais obtidos a dois ensaios, utilizando o Simulink®, com objetivo de levantar parâmetros para posterior comparação.

O algoritmo de integração utilizado foi o ODE23 tal qual nos ensaios em tempo contínuo. O tempo de simulação adotado para todas as baterias foi de 0,2 segundos. O Simulink foi configurado ainda com fator de refinamento unitário, tolerância relativa de  $1.10^{-4}$  e tolerância absoluta automática e tempo de simulação de 0,2 segundos.

### 4.9.1. Resultados da primeira bateria de simulações

Na primeira bateria de simulações foi aplicado no instante  $t=0$  um degrau unitário no valor de referência a cada um dos sistemas. Foram levantados os máximos valores de sobre-sinal e tempo de acomodação para cada um dos sistemas. Também foram levantados os valores dos índices ITAE e ITSE. Os resultados obtidos são mostrados nos gráficos a seguir.

A Figura 4.7 apresenta a forma de onda dos controladores digitais projetados por Ziegler Nichols. Observamos que somente os controladores  $G_{CD1}$ ,  $G_{CD2}$  e  $G_{CD5}$  apresentaram respostas estáveis. Em relação aos controladores projetados por emulação, cujas formas de onda já foram mostradas na Figura 4.6 somente os controladores  $G_{CD7}$ ,  $G_{CD8}$ ,  $G_{CD11}$  e  $G_{CD12}$  apresentaram respostas estáveis. Por isto, somente estes controladores serão avaliados na análise comparativa.

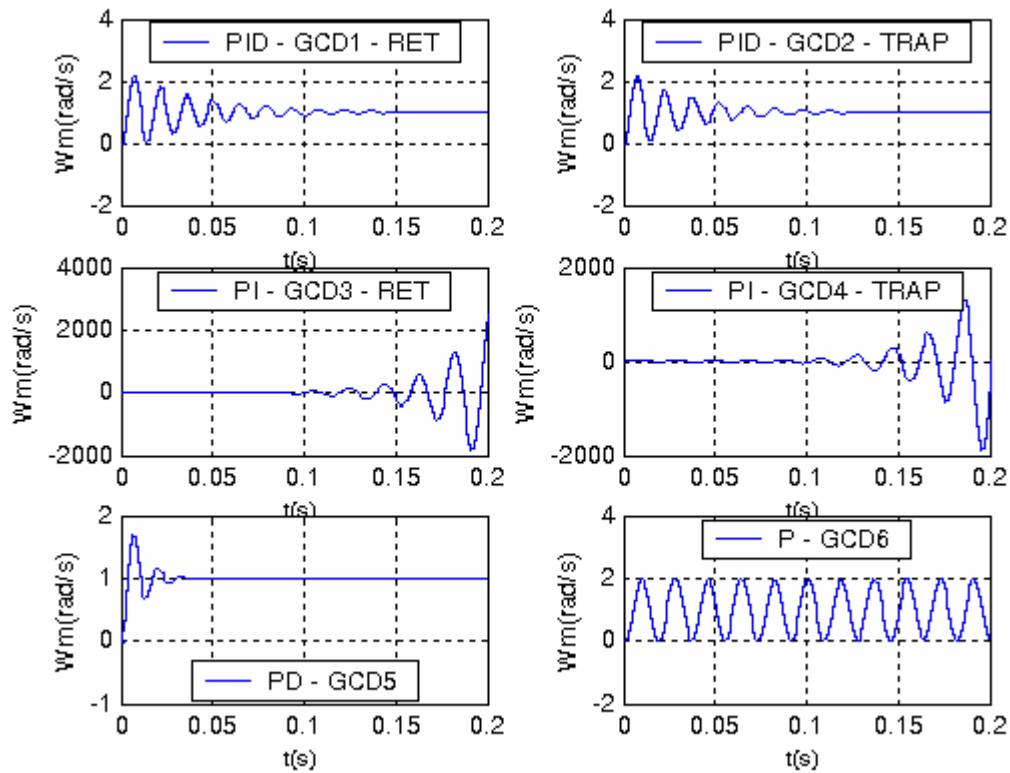


Figura 4.7 - Resposta ao degrau dos controladores digitais projetados por Ziegler-Nichols

A Figura 4.8 apresenta os valores obtidos para o sobre-sinal máximo nos controladores digitais projetados por Ziegler Nichols e emulados. Nela podemos verificar que todos os controladores obtidos apresentaram sobre-sinais elevados, acima de 50%.

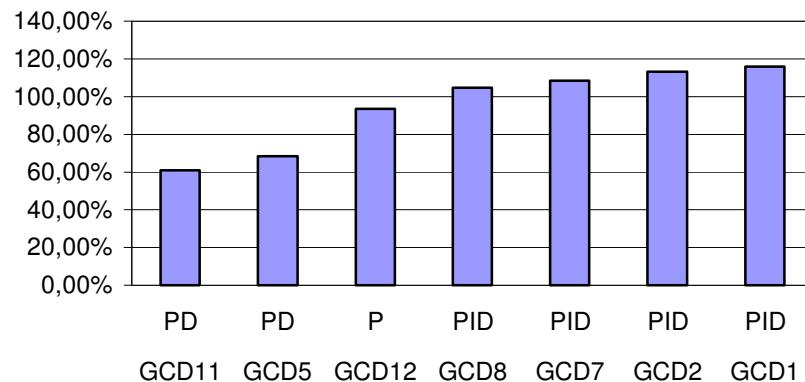


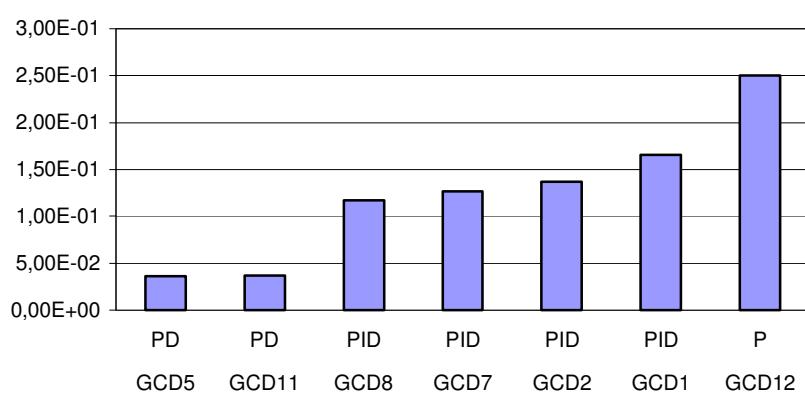
Figura 4.8 – Sobre-sinais máximos dos controladores digitais

Comparando com a Figura 3.4 observamos que os controladores digitais PID sintonizados pelo método das oscilações continuas de Ziegler-Nichols, apresentaram sobre-sinais relativamente superiores aos controladores analógicos sintonizados pelo mesmo método.

Os valores dos sobre-sinais obtidos para o grupo de controladores sintonizados por Ziegler-Nichols, foram muito semelhantes aos valores obtidos para os controladores projetados por emulação.

A Figura 4.9 apresenta os tempos de acomodação obtidos durante a primeira simulação.

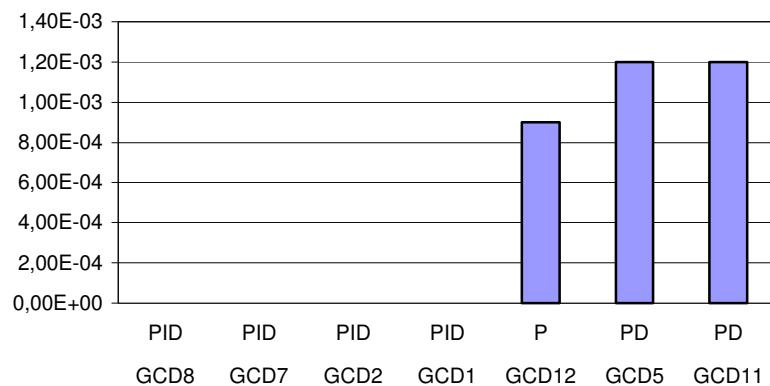
Os valores dos tempos de acomodação obtidos para o grupo de controladores sintonizados por Ziegler-Nichols, foram muito semelhantes aos valores obtidos para os controladores projetados por emulação. Os melhores tempos de acomodação foram os apresentados pelos controladores PD G<sub>CD5</sub> e G<sub>CD11</sub>.



**Figura 4.9 – Tempos de acomodação dos controladores digitais**

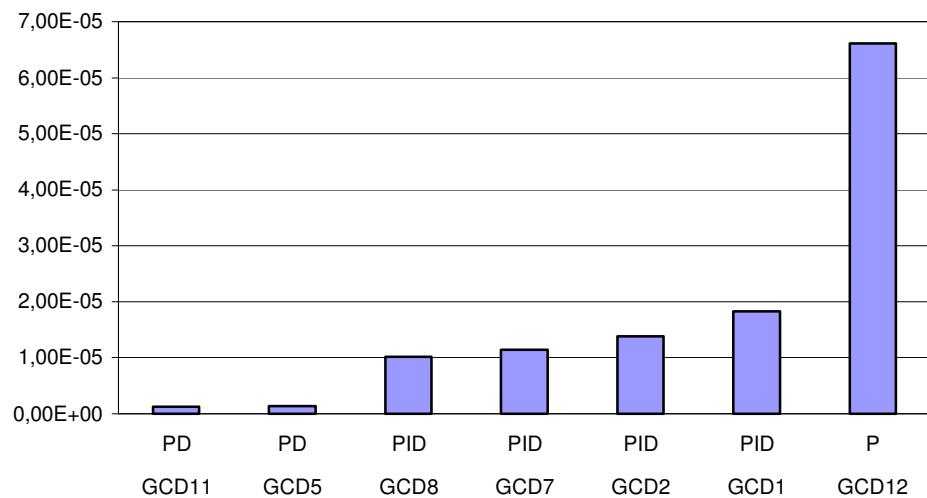
Os tempos de acomodação obtidos em geral são superiores aos obtidos para os controladores analógicos (ver Figura 3.5).

A Figura 4.10 apresenta o erro dos controladores PID digitais.



**Figura 4.10 - Erro dos controladores digitais**

Observamos que os controladores PID não apresentaram erro em regime estacionário, conforme esperado enquanto que os controladores PD apresentaram erro superior ao controlador P.



**Figura 4.11 – Índices ITAE dos controladores digitais – 1<sup>a</sup> bateria**

Os valores para o índice ITAE são apresentados na Figura 4.11, onde verificamos que os controladores que utilizam o algoritmo com integração trapezoidal apresentam índices melhores que os controladores cujo algoritmo utiliza a integração retangular.

Os controladores PID e PD são os que apresentam os melhores índices ITAE dentre os demais, sendo que o melhor de todos é o do controlador PD projetado por emulação  $G_{CD11}$  seguido do controlador PD sintonizado por Ziegler-Nichols  $G_{CD5}$ .

O controlador com pior desempenho para o índice ITAE é  $G_{CD12}$ . Em geral os controladores P e PI são os de pior desempenho, tanto que os controladores PI apresentaram resposta instável e não foram avaliados.

A Figura 4.12 mostra os valores para o índice ITSE, onde novamente os controladores com melhor desempenho são os controladores PD e o pior de todos é o controlador proporcional  $G_{CD12}$ .

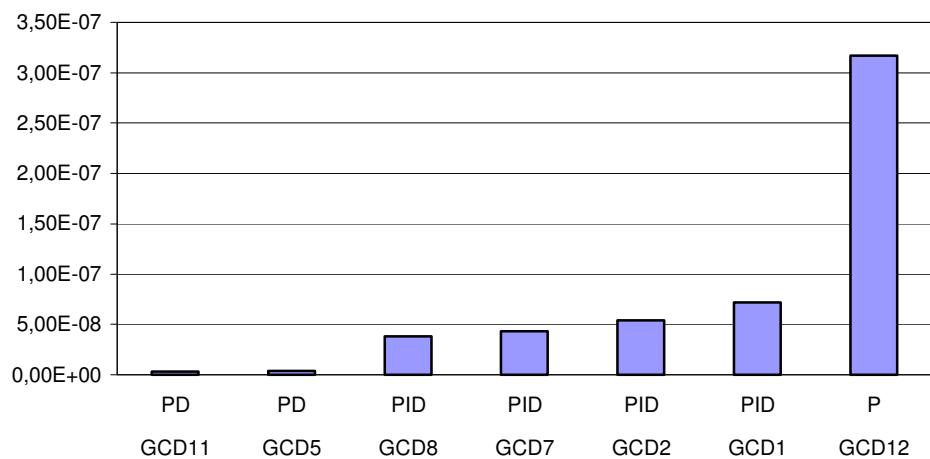
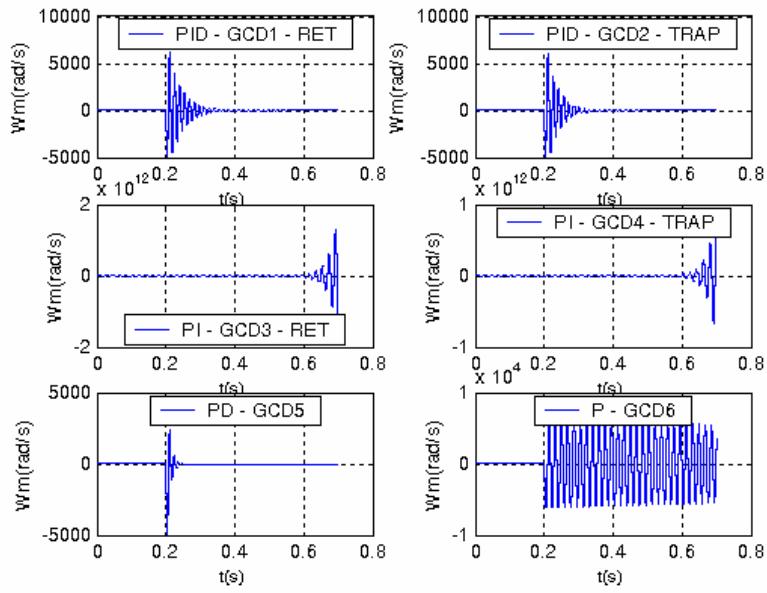


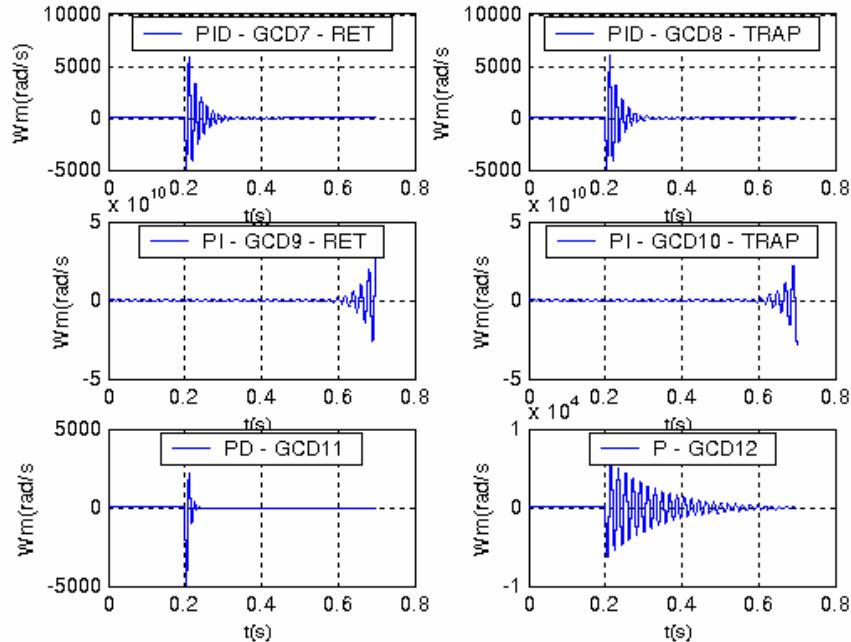
Figura 4.12 – Índices ITSE dos controladores digitais – 1a bateria

#### 4.9.2. Resultados da segunda bateria de simulações

Na segunda bateria de simulações foi aplicado um degrau unitário no valor de referência em  $t=0$  e passado o tempo de acomodação de todos os controladores, levantados na primeira bateria de simulações, em  $t=0,25$  s, foi aplicado um degrau de 0,2 na carga. A simulação conclui-se após 0,7 s.



**Figura 4.13 - Resposta ao degrau e variação de carga – Controladores digitais projetados por Ziegler-Nichols**

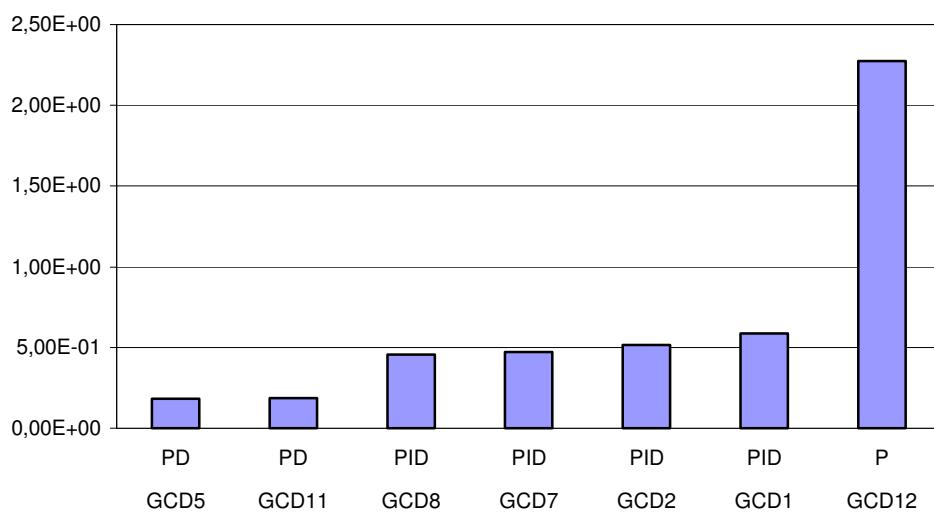


**Figura 4.14 - Resposta ao degrau e variação de carga - Controladores digitais emulados**

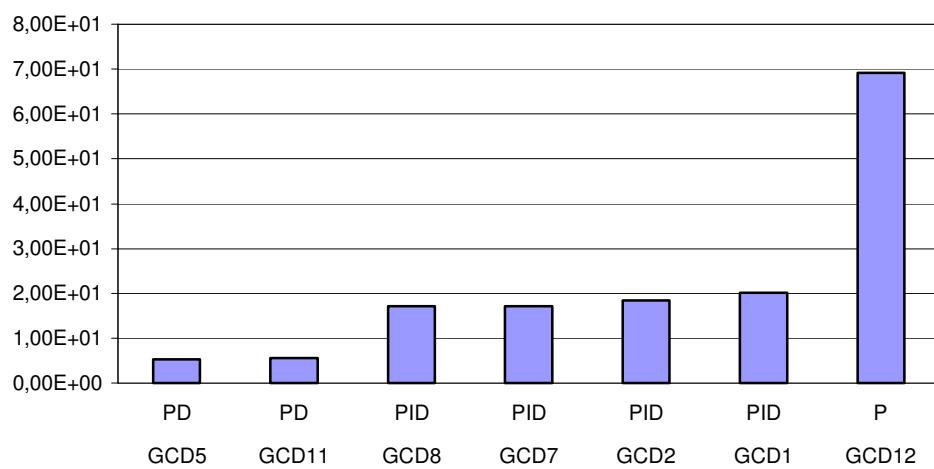
As formas de onda obtidas nos ensaios são apresentadas na Figura 4.13 e Figura 4.14 onde novamente verificamos que os controladores  $G_{CD3}$ ,  $G_{CD4}$ ,  $G_{CD6}$ ,  $G_{CD9}$  e  $G_{CD10}$

apresentaram resposta instável. Além disso, observamos que a introdução de carga proporciona uma oscilação em todos os controladores que é muito maior que a observada nos controladores analógicos (Figura 3.11 e Figura 3.12).

Os índices ITAE obtidos nos ensaios são apresentados na Figura 4.15. O controlador com o pior índice é o proporcional  $G_{CD12}$  e os de melhor desempenho são os controladores PD  $G_{CD5}$  e  $G_{CD11}$ .



**Figura 4.15 – Índices ITAE dos controladores digitais – 2a bateria**



**Figura 4.16 – Índices ITSE dos controladores digitais – 2a bateria**

Os valores dos índices ITSE são apresentados na Figura 4.16. O controlador com o melhor desempenho foi o PD  $G_{CD5}$  e o pior, novamente, foi PI  $G_{CD12}$ .

#### **4.10. Conclusões**

Analizando os dados obtidos em conjunto percebemos que dentre os doze projetados os controladores  $G_{CD3}$ ,  $G_{CD4}$ ,  $G_{CD6}$ ,  $G_{CD9}$  e  $G_{CD10}$  apresentaram resposta instável e mesmo o controlador  $G_{CD12}$  não apresentou bom desempenho. Os melhores controladores são na sequência  $G_{CD11}$ ,  $G_{CD5}$  (ambos PD) e  $G_{CD8}$  (PID). Observamos também que os controladores PID projetados com algoritmo de integração trapezoidal apresentaram melhor desempenho que aqueles desenvolvidos por integração retangular.

Finalmente é importante destacar que, devido à introdução da amostragem há uma piora considerável no desempenho do sistema com os controladores digitais, principalmente com a introdução da carga.

## 5. CONTROLADORES NEBULOSOS (*FUZZY*)

Vários métodos de ajuste de controladores disponíveis na literatura têm sido largamente utilizados para sintonia de controladores PID, mesmo nos casos onde a dinâmica do sistema não é totalmente conhecida (OGATA, 1998), porém, sabemos que para sistemas com altos valores de tempo morto, comportamentos oscilatórios e sistemas de ordem superior o controlador PID não apresenta bom desempenho (ÅSTRÖM et al, 1995). Adicionalmente sabemos que as regras de sintonia propostas são em sua maioria baseadas em modelos simplificados dos processos justificando, portanto o pobre desempenho do PID para processos mais complexos.

Métodos analíticos para cálculo dos parâmetros do controlador tais como a Síntese Direta e o Cancelamento de Pólos, partem da premissa de que o modelo do processo a ser controlado deve ser conhecido, porém nem sempre é possível modelar com exatidão um sistema devido ao desconhecimento do processo em questão (SHAW et al, 1999).

Outras dificuldades para o controle com o algoritmo PID incluem os sistemas que possuem alguma não-linearidade (saturação, zona-morta, histerese), onde é necessária a linearização do modelo do sistema em torno de um ponto de operação o que acarreta mais imprecisões no modelo, e parâmetros variantes no tempo que podem ser causados por desgastes dos componentes de uma válvula ou de um atuador, ou ainda por distúrbios externos não previstos tais como variações nas condições ambientais.

O controle nebuloso supre estas lacunas do PID uma vez que na realidade trata-se de um controlador não linear (SHAW et al, 1999) onde não há necessidade do conhecimento do modelo matemático do sistema. Outra característica fundamental nos sistemas nebulosos é que o conhecimento do operador humano, ou de um especialista,

a respeito de um processo pode ser codificado em regras lingüísticas, tornando estes controladores capazes de raciocinar de forma semelhante ao ser humano. O controlador nebuloso tem a habilidade de gerar respostas precisas com base em informações imprecisas tais como “o erro é muito grande” ou “o erro está crescendo muito rapidamente” ou ainda “o erro está próximo de zero”, e regras nebulosas tais como “se o erro é muito alto então a saída do controlador é muito alta”, inferidas através do conhecimento humano do processo. Desta forma os sistemas construídos com controladores nebulosos baseados em regras são facilmente compreendidos pelos operadores das plantas.

O controlador nebuloso transforma as variáveis analógicas ou discretas de sua entrada em variáveis lingüísticas, através do processo de fuzzificação, e então utilizando um conjunto de regras do tipo “se <premissa> então <conclusão>” e um processo de inferência nebulosa (agregação e composição) calcula o valor da variável lingüística de saída do controlador. Esta para que possa ser utilizada no processo passa por um processo de defuzzificação transformando o valor lingüístico obtido numa variável “crisp” ou exata uma vez que os atuadores ou circuitos de acionamento necessitam de valores exatos para seu funcionamento.

O projeto de um controlador nebuloso compreende as seguintes etapas: seleção das entradas e saídas do controlador; definição das variáveis lingüísticas das entradas e saídas; definição da base de regras; escolha do método de inferência associada às regras nebulosas, seleção do método de fuzzificação e defuzzificação e avaliação do controlador (COELHO et al, 2003).

Cabe ressaltar que embora o modelo do processo não seja necessário para o projeto de um controlador nebuloso é desejável obtê-lo, mesmo que seja aproximado, uma vez que o entendimento do sistema a ser controlado certamente será melhor se conhecermos seu modelo e, portanto as regras lingüísticas podem ser mais bem compreendidas (PASSINO et al, 1998). Outro aspecto é que os modelos são

necessários para simulações em computador, ferramenta fundamental no desenvolvimento de controladores nebulosos (PASSINO et al, 1998).

## 5.1. Fundamentos da Lógica Nebulosa

### 5.1.1. Conjuntos Nebulosos e funções de pertinência

Na teoria de conjuntos clássica, ou “crisp”, um elemento é caracterizado como pertencente ou não a um conjunto definido num universo de discurso **U**, que é o conjunto que contém todos os elementos individuais habilitados a serem citados ou quantificados (TSOUKALAS et al, 1997), através de uma função característica do tipo tudo ou nada (bivalente ou Booleana) definida como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in A \\ 0 & \text{para } x \notin A \end{cases} \quad (5.1)$$

Por exemplo, seja o universo de discurso **U** das pessoas com idades menores ou igual a 30 anos e o conjunto **A**, representando os adolescentes, cujas idades estão entre 12 e 18 anos, verificamos que uma pessoa que possua 12 anos pertence a este conjunto enquanto que uma com 11 anos não pertence.

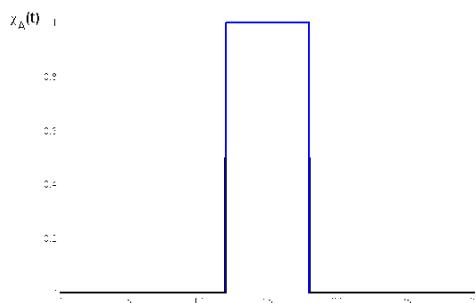


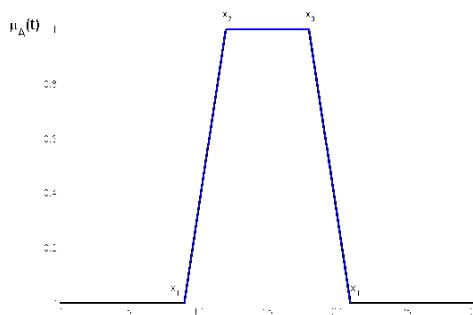
Figura 5.1 – Gráfico da função característica do conjunto clássico A

A Figura 5.1 ilustra a descontinuidade abrupta entre os elementos que pertencem ou não ao conjunto **A**, através da plotagem do gráfico de sua função característica.

A teoria dos conjuntos nebulosos é uma extensão da teoria clássica (TSOUKALAS et al, 1997). Nesta o elemento  $x$  pertence ou não a um conjunto nebuloso  $A$ , definido no universo de discurso  $U$ , com certo grau de pertinência ou verdade. A função característica, agora chamada de função de pertinência, mapeia todos os elementos do universo de discurso para o intervalo  $[0,1]$ . Neste caso uma pessoa que possua 12 anos pertence ao conjunto dos adolescentes com determinada pertinência ou grau de certeza.

Abaixo temos um exemplo de função de pertinência nebulosa com formato trapezoidal:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{se } x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & \text{se } x_2 \leq x < x_3 \\ \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} & \text{se } x_3 \leq x \leq x_4 \\ 0 & \text{se } x > x_4 \end{cases} \quad (5.2)$$



**Figura 5.2 - Diagrama de Zadeh para o conjunto nebuloso A**

A Figura 5.2 ilustra a função de pertinência descrita acima através do Diagrama de Zadeh, que representa graficamente a relação de pertinência de cada elemento do universo de discurso a determinado conjunto nebuloso, neste caso o conjunto A dos adolescentes.

Podemos verificar que existe uma faixa de transição entre os elementos que pertencem ou não ao conjunto dos adolescentes, de forma oposta a um conjunto clássico onde a transição é abrupta.

Verificamos ainda que uma pessoa que possua 11 anos pertence ao conjunto dos adolescentes definido acima com um grau de certeza de 0,67 enquanto que outra que possua 12 pertence com um grau de certeza de 1.

Um conjunto nebuloso é expresso como um conjunto de pares ordenados conforme abaixo:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in U\}$$

As funções de pertinência podem possuir vários formatos, mas os mais comuns, por serem mais fáceis de serem gerados, são o triangular e o trapezoidal (SHAW et al, 1999). Outros formatos utilizados são o sigmoidal, a curva gaussiana e etc. A Figura 5.3 ilustra algumas dessas funções de pertinência.

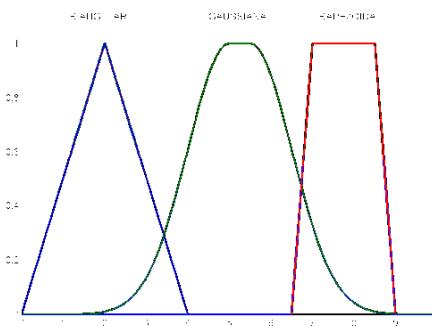


Figura 5.3 - Funções de Pertinência usuais

### 5.1.2. Operações Básicas entre conjuntos nebulosos

De forma análoga aos conjuntos clássicos podemos definir as operações de união, interseção e complemento dos conjuntos nebulosos.

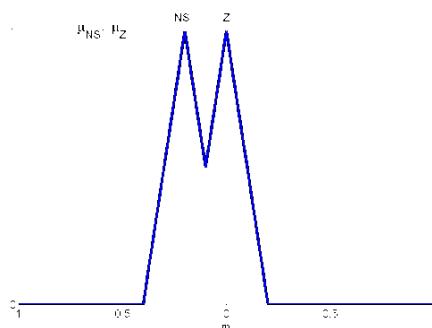
A união de dois conjuntos nebulosos, pertencentes ao mesmo universo de discurso, é fornecida pela equação abaixo:

$$\mu_A(x) \cup \mu_B(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (5.3)$$

Por exemplo, seja o universo de discurso  $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  e os conjuntos nebulosos  $A \in U$  e  $B \in U$ , sendo  $A = \{0,1; 0,5; 0,3; 0,9; 1\}$  e  $B = \{0,7; 0,5; 0,1; 0,6\}$  então o vetor de pertinências do conjunto união  $A \cup B$  será dado pelo máximo das pertinências tomadas elemento a elemento. Por consequência o conjunto união será dado por  $A \cup B = \{0,7; 0,5; 0,3; 1; 1\}$ ;

A união de conjuntos nebulosos pertencentes ao mesmo universo de discurso é utilizada para representar o operador booleano “ou” (PASSINO et al, 1998).

A Figura 5.4 ilustra a união de dois conjuntos nebulosos. No eixo horizontal temos a representação do universo de discurso e no eixo vertical os valores da função de pertinência do conjunto união, para cada um dos elementos do universo de discurso.

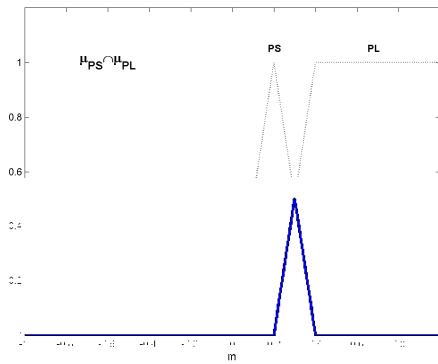


**Figura 5.4 – Diagrama de Zadeh para a união dos conjuntos NM e Z**

A intersecção de conjuntos nebulosos, pertencentes ao mesmo universo de discurso, é dada pela expressão:

$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (5.4)$$

A Figura 5.5 apresenta o resultado da intersecção de dois conjuntos nebulosos. Novamente o eixo horizontal representa o universo de discurso e o eixo vertical os valores da função de pertinência do conjunto intersecção para cada elemento do universo de discurso.



**Figura 5.5 – Diagrama de Zadeh para intersecção dos conjuntos A e B**

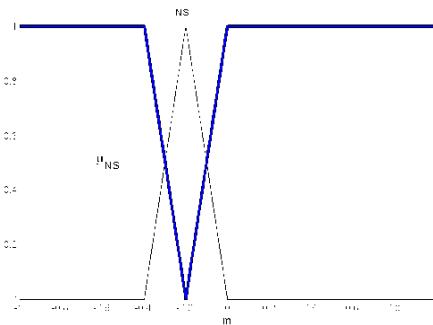
Sejam os conjuntos nebulosos **A** e **B**, pertencentes ao universo de discurso **U**, definidos anteriormente então o vetor de pertinências do conjunto intersecção  $A \cap B$  será dado pelo mínimo das pertinências tomadas elemento a elemento. Por consequência o conjunto intersecção será dado  $A \cap B = \{0,1;0,5;0;0,9;0,6\}$ ;

A intersecção de conjuntos nebulosos pertencentes ao mesmo universo de discurso é utilizada para representar o operador booleano “e” (PASSINO et al, 1998). Verificamos que o conjunto nebuloso resultante não é normal, ou seja, não possui nenhum elemento com grau de pertinência igual a um.

O Complemento do conjunto nebuloso **A**, pertencente ao universo de discurso **U**, é composto por todos os elementos que não pertencem ao conjunto **A**, mas pertencem ao universo de discurso em questão. O complemento é dado pela expressão:

$$\neg \mu_A(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (5.5)$$

A Figura 5.6 ilustra o complemento de um conjunto nebuloso.



**Figura 5.6 – Diagrama de Zadeh para o conjunto nebuloso “complemento de A”**

A intersecção de conjuntos nebulosos pertencentes ao mesmo universo de discurso é utilizada para representar o operador booleano “não” (PASSINO et al, 1998).

Seja o conjunto **A** definido anteriormente, o seu complemento, no universo de discurso **U**, será dado por  $\neg A = \{0,9; 0,5; 0,7; 0,1; 0\}$ .

As propriedades dos conjuntos clássicos (associatividade, comutatividade, distributividade e etc.) também valem, em sua maioria, para os conjuntos nebulosos exceto pelas leis do meio excluído e da contradição.

Na teoria clássica dos conjuntos a união de um conjunto com o seu complemento é sempre igual ao universo de discurso. Esta é a lei do meio excluído. Podemos verificar através da Figura 5.6 que esta lei não vale para os conjuntos nebulosos, logo  $A \cup \neg A \neq U$ .

A intersecção de um conjunto clássico com o seu complemento é o conjunto vazio, esta propriedade é conhecida como lei da contradição. Podemos verificar, através da Figura 5.6, que a intersecção de um conjunto nebuloso com o seu complemento é diferente do conjunto vazio, logo  $A \cap \neg A \neq \emptyset$ .

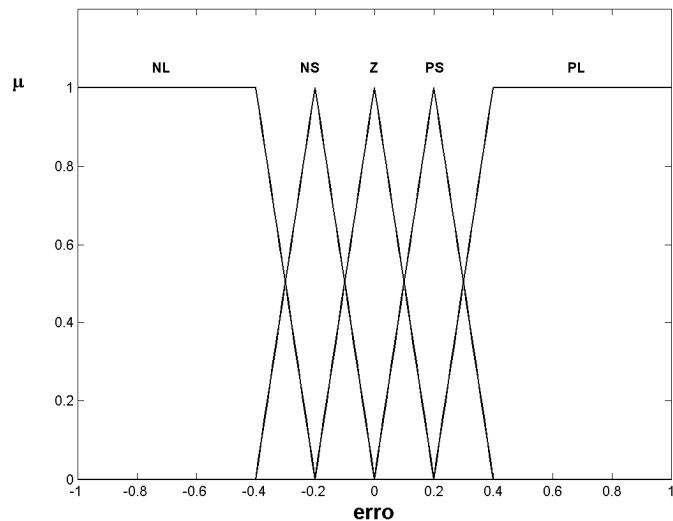
A intersecção de um conjunto nebuloso com o conjunto vazio é o próprio conjunto vazio, logo  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

Um conjunto nebuloso é dito normal se, no mínimo, um de seus elementos  $x_n$  possuir grau de pertinência ao conjunto igual a 1.

### 5.1.3. Variáveis lingüísticas

Variáveis lingüísticas são variáveis cujos valores são palavras ou sentenças em linguagem natural ou artificial (ZADEH, 1975). Estas palavras podem ser representadas por conjuntos nebulosos (TSOUKALAS et al, 1997).

O Diagrama de Zadeh da Figura 5.7 apresenta a variável lingüística “erro”, correspondente a variável numérica erro de entrada de um controlador.



**Figura 5.7 - Diagrama de Zadeh para a variável lingüística “erro”**

Associamos aos valores lingüísticos da variável erro conjuntos nebulosos, cujas funções de pertinência apresentadas em nosso exemplo são trapezoidais e triangulares, representando os valores que esta variável pode assumir e modificando seu significado.

Podemos verificar através do diagrama que esta variável pode assumir os valores lingüísticos {NL, NS, Z, PS, PL} que a qualificam e a modificam. Neste diagrama NS

(*Negative Small*) é o conjunto dos erros negativos próximos de zero (**Z**) e **PL** (*Positive Large*) é o conjunto dos erros positivos distantes de zero. Da mesma forma **PS** (*Positive Small*) significa o conjunto dos erros positivos pequenos e assim por diante.

Os termos “*positive*”, “*zero*” e “*negative*” são chamados de primários e os termos “*small*”, “*medium*” e “*large*” de modificadores.

Verificamos ainda que os conjuntos nebulosos adotados ocupam toda a faixa de variação (universo de discurso) desta variável [-1 1].

Para perfeita caracterização de uma variável lingüística devemos então definir o nome da variável, o universo de discurso, os termos primários, os modificadores e ainda as funções de pertinência associadas a cada valor da variável.

## 5.2. Estrutura e funcionamento do controlador nebuloso

A Figura 5.8 apresenta a estrutura básica de um controlador nebuloso com uma entrada e uma saída.

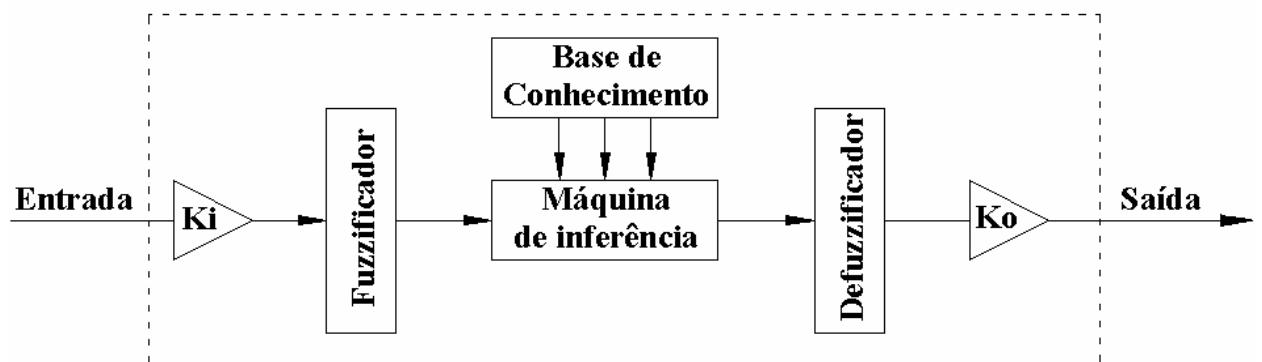


Figura 5.8 - Estrutura do controlador nebuloso

Verificamos que ele é composto dos seguintes elementos:

- Base de Conhecimento
- Fuzzificador
- Maquina de inferência

- Defuzzificador

A base de conhecimento do controlador é composta de um conjunto de regras do tipo “se <premissa> então <conclusão>” e das informações relacionadas as variáveis lingüísticas de entrada e saída do controlador tais como quantidade, formato e sobreposição das funções de pertinência, bem como a definição do universo de discurso de cada variável. A base de conhecimento representa o modelo do sistema a ser controlado (SHAW et al, 1999).

O Universo de discurso é escolhido em função da faixa de variação das variáveis “crisp” de entrada ou saída, porém em geral são utilizados fatores de escala de forma a normalizar os intervalos utilizados o que simplifica os cálculos (TSOUKALAS et al, 1997) e diminui o esforço computacional.

As variáveis lingüísticas mais comuns utilizadas como entrada do controlador são o erro  $e(t)$  e a variação (derivada) do erro  $de(t)/dt$ . A variável de saída é  $m(t)$  (variável manipulada).

A escolha do formato e da quantidade de funções de pertinência para cada variável lingüística é subjetiva (PASSINO et al, 1998) e pode variar conforme a aplicação desejada. Em geral temos um número pequeno de funções de pertinência (ÅSTRÖM et al, 1995) e os formatos mais utilizados são o triangular e o trapezoidal, pois são mais fáceis de serem gerados (SHAW et al, 1999). As funções de pertinência devem cobrir todo o universo de discurso e a sobreposição entre elas deve estar no intervalo de 25% a 75% (SHAW et al, 1999).

A Base de regras é construída utilizando relações entre variáveis lingüísticas e podem ser expressas através de declarações condicionais nebulosas, utilizando os conectivos “E”, “OU”, “NÃO”, “SE”, “ENTÃO” e “SENÃO”, entre outros, por exemplo:

SE erro é PL E variação do erro é PL ENTÃO saída é PL  
ANTECEDENTES CONSEQÜENTE

Os antecedentes são avaliados pela máquina de inferência, através da implicação nebulosa, que então calcula o valor dos conseqüentes de cada regra num processo chamado de agregação. O processo de composição calcula a contribuição individual de cada regra na saída total do controlador.

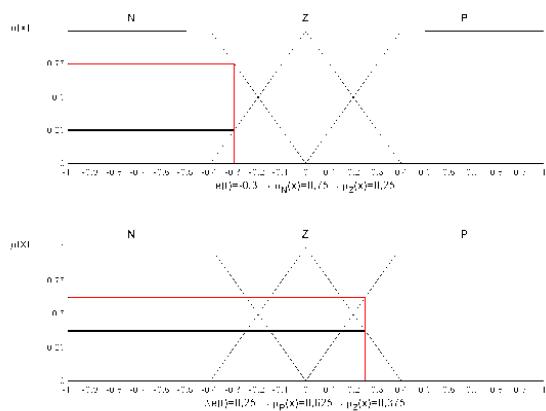
A quantidade de regras necessárias é função da quantidade de variáveis lingüísticas de entrada e dos respectivos valores lingüísticos, por exemplo, seja um controlador cujas variáveis lingüísticas de entrada sejam o “erro” com três termos lingüísticos (N, Z e P) e a “variação do erro” com três termos lingüísticos (N, Z e P) e cuja saída seja “m” (de variável manipulada) com cinco termos lingüísticos (NL, NS, Z, PS, PL), seriam necessárias então nove regras nebulosas para representar todo o conhecimento relativo ao processo. Não se devem eliminar regras, pois características importantes do processo poderiam ser suprimidas (ASSIS, 1997).

Para o controlador descrito acima teríamos então o seguinte conjunto de regras:

- R1: **se** “erro é N” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é Z”
- R2: **se** “erro é N” **e** “derivada do erro é Z” **então** “saída do controlador é NS”
- R3: **se** “erro é N” **e** “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NL”
- R4: **se** “erro é Z” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PS”
- R5: **se** “erro é Z” **e** “derivada do erro é Z” **então** “saída do controlador é Z”
- R6: **se** “erro é Z” **e** “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NS”
- R7: **se** “erro é P” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PL”
- R8: **se** “erro é P” **e** “derivada do erro é Z” **então** “saída do controlador é PS”
- R9: **se** “erro é P” **e** “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é Z”

O “Fuzzificador” é o elemento responsável por transformar os valores exatos, ou “crisp”, que as variáveis de entrada do controlador podem assumir, em valores nebulosos para que possam ser avaliados pelo processo de inferência. O fuzzificador mapeia os valores contínuos ou discretos dos sinais de entrada, calculando a pertinência desses valores a cada um dos subconjuntos da variável nebulosa em questão.

A Figura 5.9 apresenta um exemplo do processo de fuzzificação para as variáveis lingüísticas erro e derivada do erro de entrada de um controlador nebuloso. Verificamos que o valor do erro igual a  $-0,3$  pertence ao conjunto **Z**, dos erros “próximos do zero”, com pertinência 0,25 e ao conjunto **N**, dos erros negativos, com pertinência 0,75. Já o valor da derivada igual a  $0,25$  pertence ao conjunto **P**, das derivadas positivas com pertinência 0,625 e ao conjunto **Z** das derivadas “próximas de zero” com pertinência 0,375.



**Figura 5.9 - Fuzzificação**

As entradas fuzzificadas definem quais regras serão ativadas para então serem avaliadas pela máquina de inferência. Esta calcula a saída de cada regra a partir dos valores das entradas através de operadores de implicação. Vários operadores de implicação estão disponíveis tais como o operador Max-Min de Zadeh, o operador Max-Min de Mandami, e etc.

No exemplo acima, para o erro= $-0,3$   $\{\mu_Z(-0,3)=0,25 \text{ e } \mu_N(-0,3)=0,75\}$  e a derivada do erro= $0,25$   $\{\mu_P(0,25)=0,625 \text{ e } \mu_Z(0,25)=0,375\}$  são ativadas as regras um, dois, quatro e cinco.

O valor da saída de cada regra é calculado pelo método de implicação de Mandami. Neste método o mínimo dos valores das pertinências das entradas (antecedentes) é selecionado através do operador de implicação de Mandami e a função de pertinência

da saída (conseqüente) de cada regra é obtida calculando-se o máximo entre o valor da função de pertinência de saída e o resultado da avaliação dos antecedentes. Esta operação corresponde ao truncamento da função de pertinência de saída da regra no valor mínimo das funções de pertinência das entradas. Este processo é chamado de agregação.

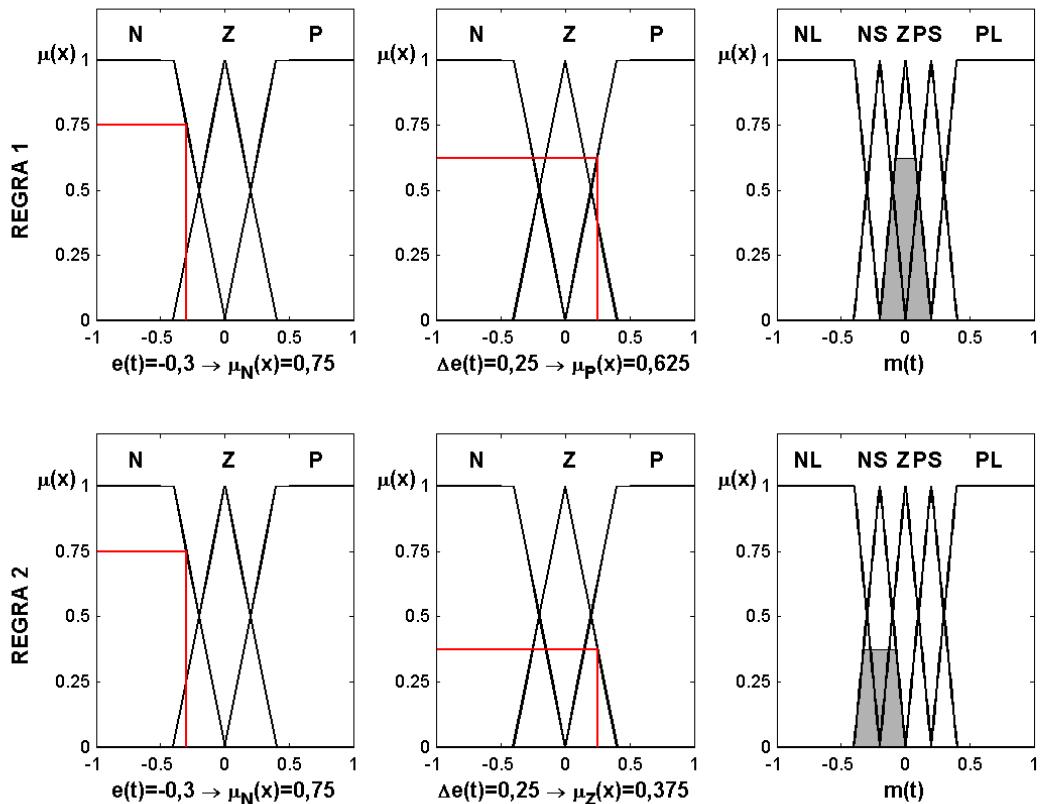
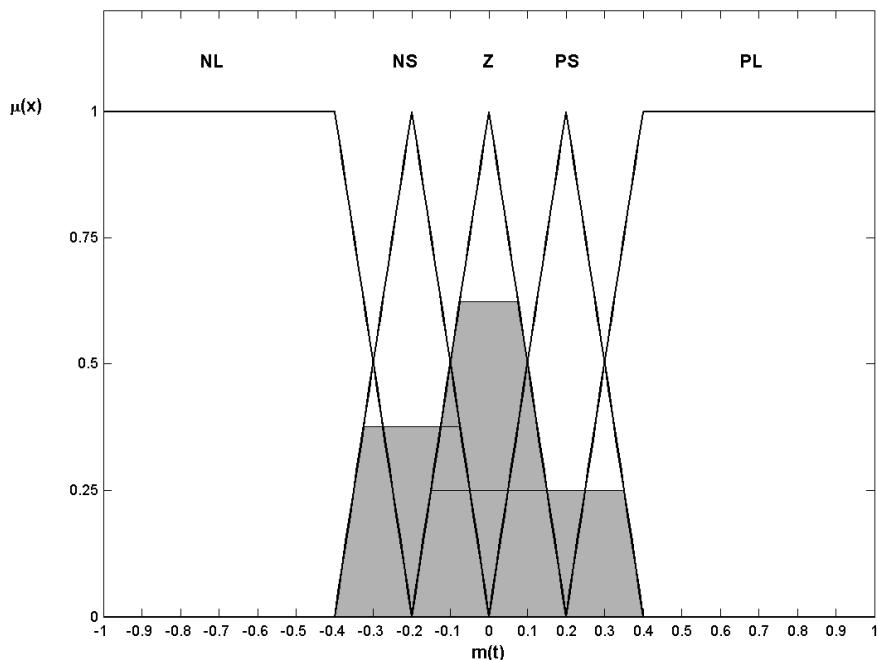


Figura 5.10 - Inferência Nebulosa

A Figura 5.10 apresenta uma ilustração do processo de agregação para as regras um e dois.

O valor obtido de cada regra deve ser combinado, através de um processo chamado de composição, de forma a obter a saída total para cada conjunto de entradas. Neste processo o máximo das pertinências de cada conjunto de saída deve ser utilizado de forma a se obter a contribuição total de cada regra para a saída.

As áreas sombreadas da Figura 5.11 representam a saída obtida após o processo de composição. Elas representam a função de pertinência do conjunto nebuloso de saída de controlador. Para que essa informação possa ser utilizada no controle ela deve ser transformada em um valor “crisp” para que possa ser utilizada na entrada de um atuador ou de um acionamento.



**Figura 5.11 - Composição**

Tal função é executada pelo defuzzificador que pode ser desenvolvido utilizando alguns dos métodos listados abaixo:

- Método do centro-de-gravidade (centróide) ou Centro-da-Área (C-o-A)
- Método do Centro-do-Máximo (C-o-M)
- Método da Média-do-Máximo (M-o-M)

O método mais comum é o do centro-de-gravidade onde a saída é obtida através do cálculo do centro de massa da figura resultante. O cálculo da saída é efetuado da seguinte forma:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \mu_{OUT}(\mu_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_{OUT}(\mu_i)}$$

### 5.3. Controladores Nebulosos projetados

Oito controladores nebulosos foram projetados e simulados, utilizando-se a planta analógica e a planta digital, com o auxilio do Simulink®.

Todos os controladores utilizaram o método do centróide para a defuzzificação e a inferência max-min de Mandami para avaliação das regras.

Como entradas dos controladores foram utilizadas as variáveis lingüísticas erro, derivada do erro e integral do erro, sozinhas ou combinadas entre si. Como saída destes controladores foi utilizada a variável lingüística  $m$  (variável manipulada).

O universo de discurso de todas as variáveis foi normalizado no intervalo [-1 1] e o formato das funções de pertinência foi definido através de tentativa e erro, sendo que os mais utilizados foram os trapezoidais e triangulares.

De forma a manter as variáveis de entrada e saída dentro das faixas de valores normalizados foram utilizados ganhos, ajustados através de tentativa e erro, para cada uma delas.

Os seguintes termos lingüísticos foram associados às funções de pertinência:

- NL – “negative large”
- NM – “negative medium”
- NS – “negative small”
- Z - Zero
- PS – “positive small”
- PM – “positive medium”
- PL – “positive large”

### 5.3.1. Controlador CN01

O controlador CN01 possui como entradas as variáveis lingüísticas erro e variação do erro e m (variável manipulada) como saída.

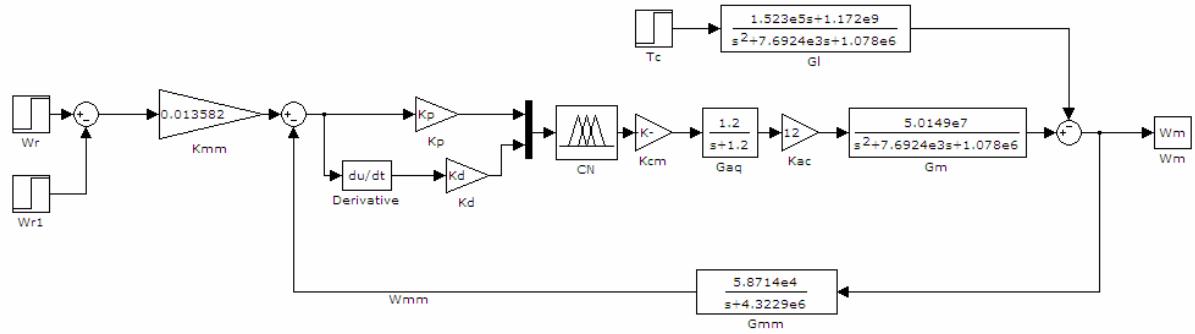


Figura 5.12 - Controlador CN01

A Figura 5.12 ilustra o sistema de controle por retroação utilizando o controlador CN01 e o universo de discurso normalizado onde as funções de pertinência deste controlador são apresentadas na Figura 5.13.

Para o controlador descrito foi utilizado o seguinte conjunto de regras:

- R1: **se** “erro é N” e “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é Z”
- R2: **se** “erro é N” e “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NL”
- R3: **se** “erro é Z” e “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PS”
- R4: **se** “erro é Z” e “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NS”
- R5: **se** “erro é P” e “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PL”
- R6: **se** “erro é P” e “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é Z”

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=0,07$  para a variável erro;
- $K_D=1 \times 10^{-7}$  para variável derivada do erro;
- $K_{CM}=250$  para variável m (saída do controlador).

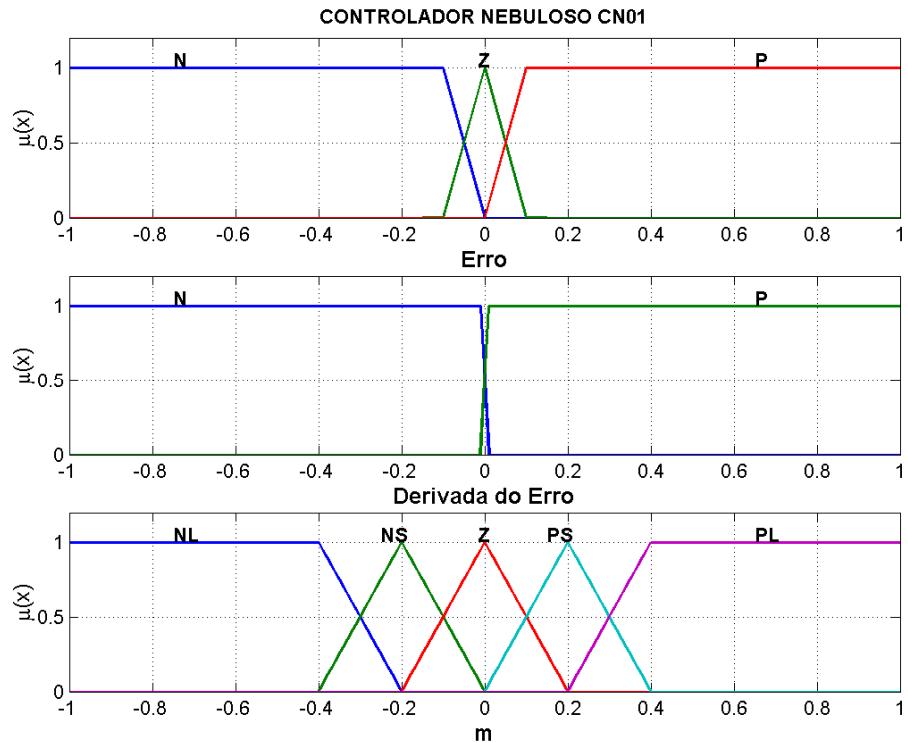


Figura 5.13 – Funções de Pertinência do Controlador CN01

### 5.3.2. Controlador CN02

O controlador CN02 foi projetado apenas com a variável erro como entrada. A Figura 5.14 apresenta o sistema de controle por retroação utilizando o controlador.

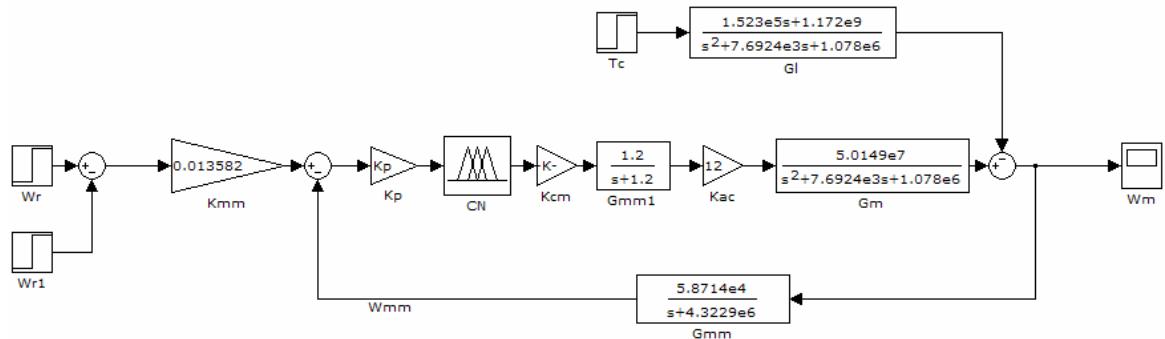


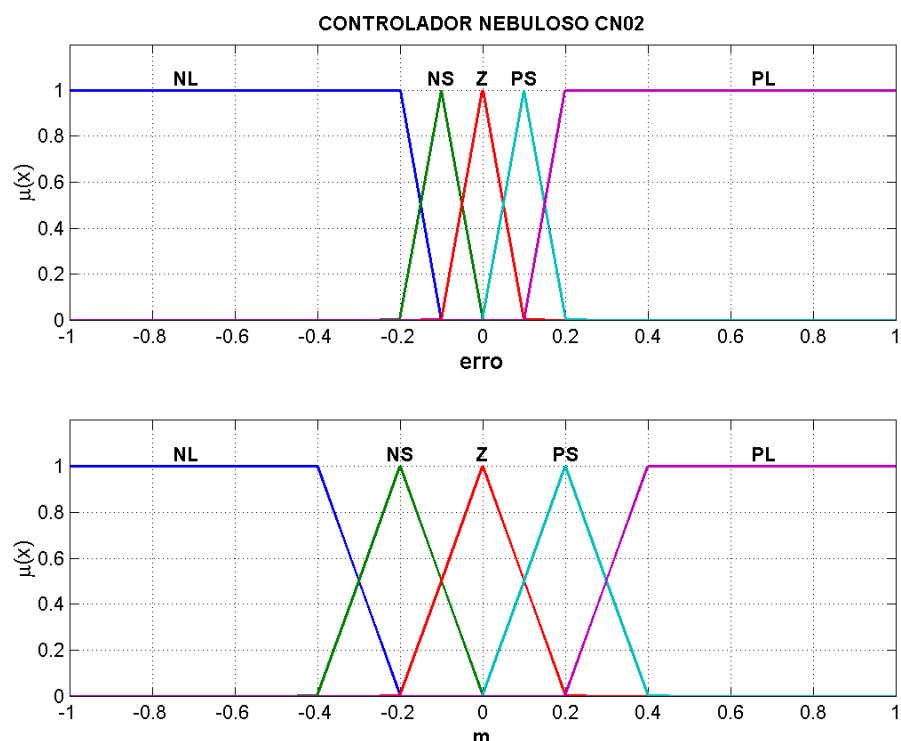
Figura 5.14 - Controlador CN02

Para este controlador foi utilizado o seguinte conjunto de regras:

- R1: se “erro é NL” então “saída do controlador é NL”

- R2: **se** “erro é NS” **então** “saída do controlador é NS”
  - R3: **se** “erro é Z” **então** “saída do controlador é Z”
  - R4: **se** “erro é PS” **então** “saída do controlador é PS”
  - R5: **se** “erro é PL” **então** “saída do controlador é PL”

O universo de discurso normalizado e as funções de pertinência deste controlador podem ser verificadas na Figura 5.15.



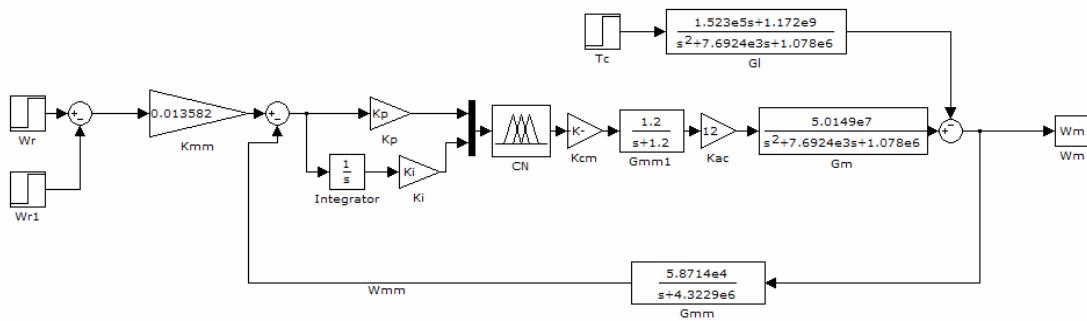
**Figura 5.15 – Funções de pertinência do Controlador CN02**

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=0,07$  para a variável erro;
  - $K_{CM}=250$  para variável m (saída do controlador).

### 5.3.3. Controlador CN03

Este controlador possui como entradas as variáveis lingüísticas erro e integral do erro e m como saída, conforme verificamos na Figura 5.16.

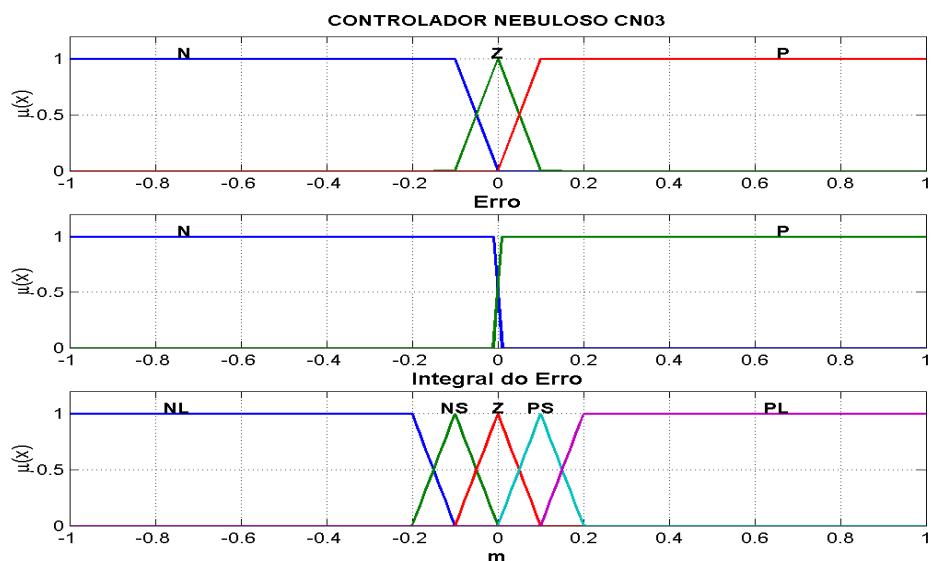


**Figura 5.16 - Controlador CN03**

Para o controlador descrito acima teremos o seguinte conjunto de regras:

- R1: **se** “erro é N” e “integral do erro é P” **então** “saída do controlador é Z”
  - R2: **se** “erro é N” e “integral do erro é N” **então** “saída do controlador é NL”
  - R3: **se** “erro é Z” e “integral do erro é P” **então** “saída do controlador é PS”
  - R4: **se** “erro é Z” e “integral do erro é N” **então** “saída do controlador é NS”
  - R5: **se** “erro é P” e “integral do erro é P” **então** “saída do controlador é PL”
  - R6: **se** “erro é P” e “integral do erro é N” **então** “saída do controlador é Z”

O universo de discurso normalizado e as funções de pertinência podem ser verificadas na Figura 5.17.



**Figura 5.17 - Funções de pertinência do Controlador CN03**

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=0,01$  para a variável erro;
- $K_i=1 \times 10^{-7}$  para variável integral do erro;
- $K_{CM}=250$  para variável  $m$  (saída do controlador).

### 5.3.4. Controlador CN04

Este controlador possui como entradas as variáveis lingüísticas erro e variação do erro e  $m$  como saída, conforme pode ser verificado através da Figura 5.18.

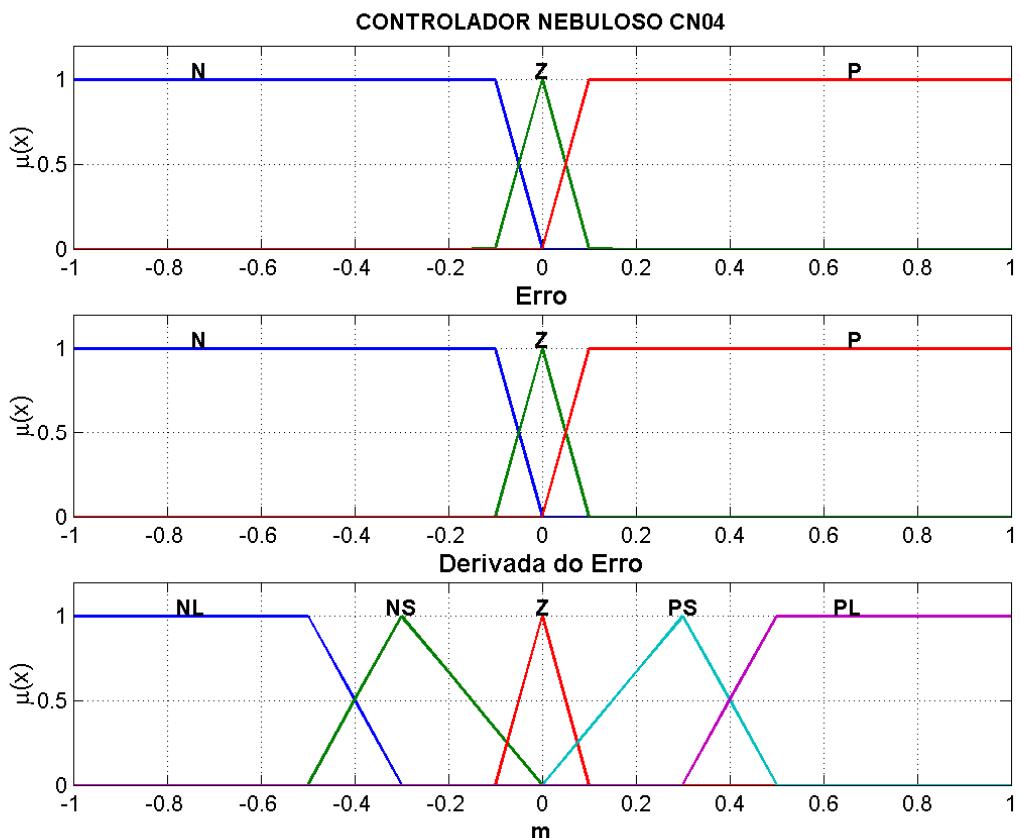


Figura 5.18 - Funções de pertinência do Controlador CN04

Para este controlador teremos o seguinte conjunto de regras:

- R1: se “erro é N” e “derivada do erro é N” então “saída do controlador é NL”
- R2: se “erro é Z” e “derivada do erro é N” então “saída do controlador é NS”
- R3: se “erro é P” e “derivada do erro é N” então “saída do controlador é Z”
- R4: se “erro é N” e “derivada do erro é Z” então “saída do controlador é NS”

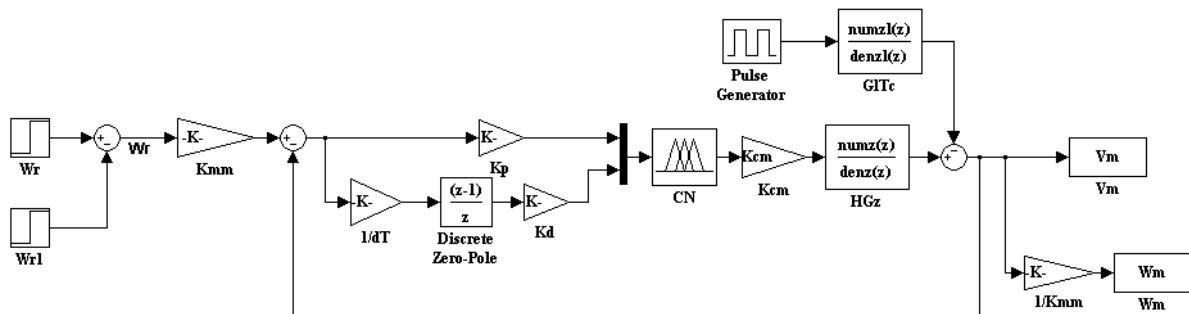
- R5: **se** “erro é Z” **e** “derivada do erro é Z” **então** “saída do controlador é Z”
  - R6: **se** “erro é P” **e** “derivada do erro é Z” **então** “saída do controlador é PS”
  - R7: **se** “erro é N” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é Z”
  - R8: **se** “erro é Z” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PS”
  - R9: **se** “erro é P” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PL”

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=0,01$  para a variável erro;
  - $K_d=1 \times 10^{-7}$  para variável derivada do erro;
  - $K_{CM}=250$  para variável m (saída do controlador).

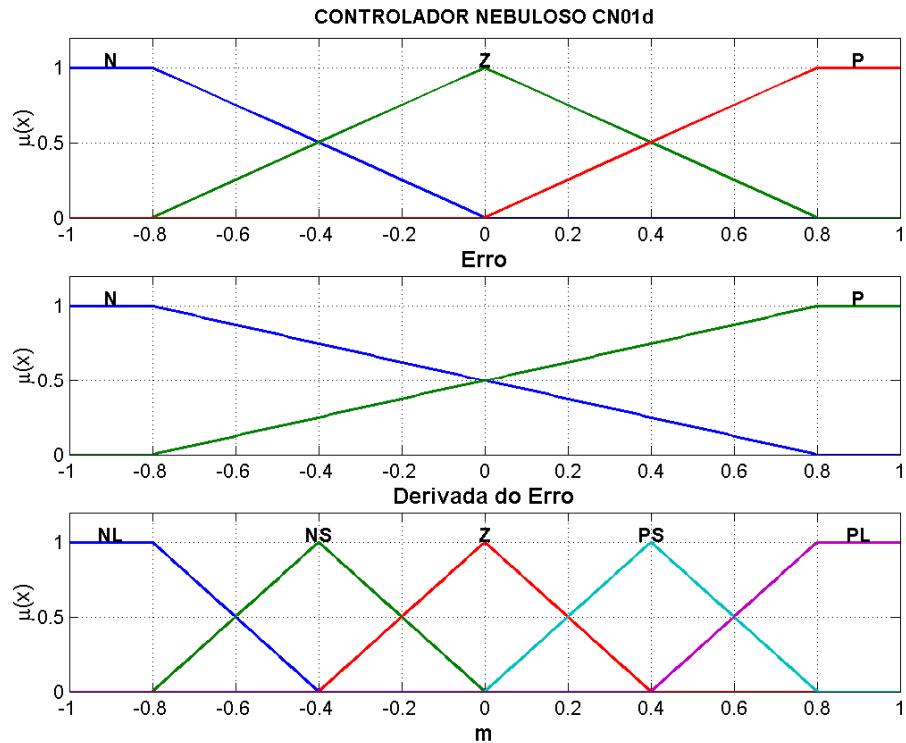
### 5.3.5. Controlador CN01d

O controlador CN01d é análogo ao controlador CN01, possui como entradas as variáveis erro e variação do erro e como saída a variável  $m$  (variável manipulada). A estrutura deste controlador pode ser verificada na Figura 5.19.



**Figura 5.19 - Controlador CN01d**

O universo de discurso normalizado e as funções de pertinência deste controlador são apresentados na Figura 5.20. Podemos verificar que o formato utilizado para as funções de pertinência é diferente dos adotados para CN01 uma vez que as funções de pertinência possuem bases maiores.



**Figura 5.20 - Funções de pertinência do Controlador CN01d**

Para o controlador descrito foi utilizado o seguinte conjunto de regras:

- R1: **se** “erro é N” e “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é Z”
- R2: **se** “erro é N” e “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NL”
- R3: **se** “erro é Z” e “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PS”
- R4: **se** “erro é Z” e “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NS”
- R5: **se** “erro é P” e “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PL”
- R6: **se** “erro é P” e “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é Z”

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=1,75$  para a variável erro;
- $K_D=1 \times 10^{-4}$  para variável derivada do erro;
- $K_{CM}=250$  para variável  $m$  (saída do controlador).

### 5.3.6. Controlador CN02d

O controlador CN02d possui como variável de entrada o erro e como saída a variável  $m$ . Sua estrutura pode ser verificada na Figura 5.21.

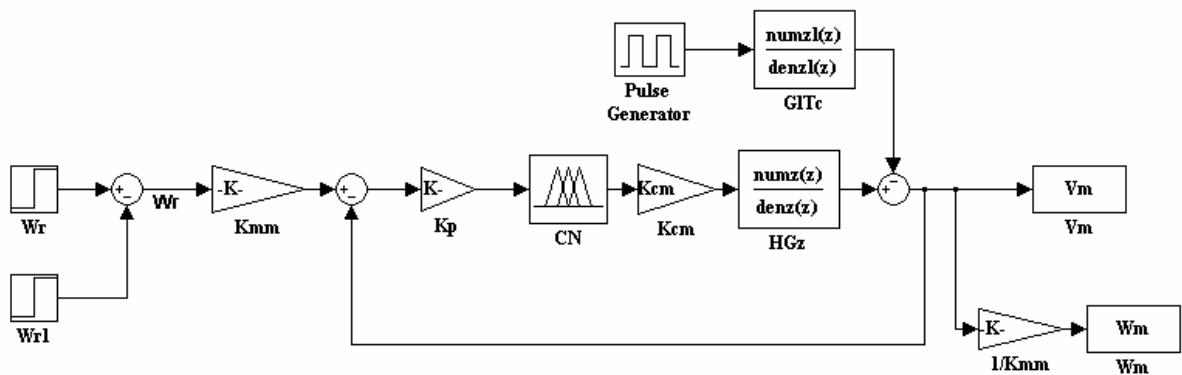


Figura 5.21 - Controlador CN02d

O formato escolhido, através de tentativa e erro, para as funções de pertinência foi a Gaussiana e pode ser verificado através da Figura 5.22.

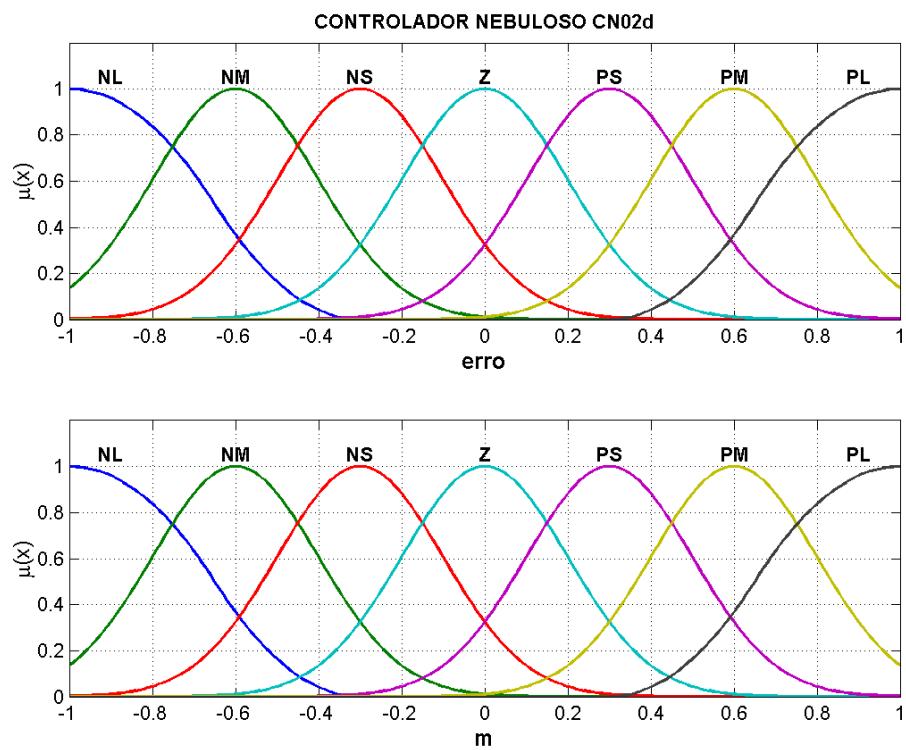


Figura 5.22 - Funções de pertinência do controlador CN02d

Para este controlador foi utilizada a seguinte base de regras:

- R1: **se** “erro é NL” **então** “saída do controlador é NL”
- R2: **se** “erro é NM” **então** “saída do controlador é NM”

- R3: **se** “erro é NS” **então** “saída do controlador é NS”
- R4: **se** “erro é Z” **então** “saída do controlador é Z”
- R5: **se** “erro é PS” **então** “saída do controlador é PS”
- R6: **se** “erro é PM” **então** “saída do controlador é PM”
- R7: **se** “erro é PL” **então** “saída do controlador é PL”

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=1$  para a variável erro;
- $K_{CM}=150$  para variável m (saída do controlador).

### 5.3.7. Controlador CN03d

O controlador CN03d é análogo ao controlador CN01d, conforme podemos verificar na Figura 5.23. Ele possui como entradas as variáveis erro e variação do erro e como saída a variável m (variável manipulada).

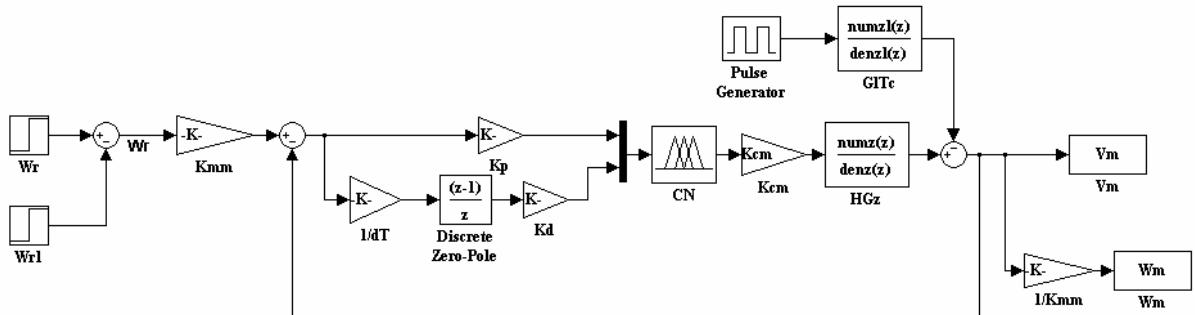
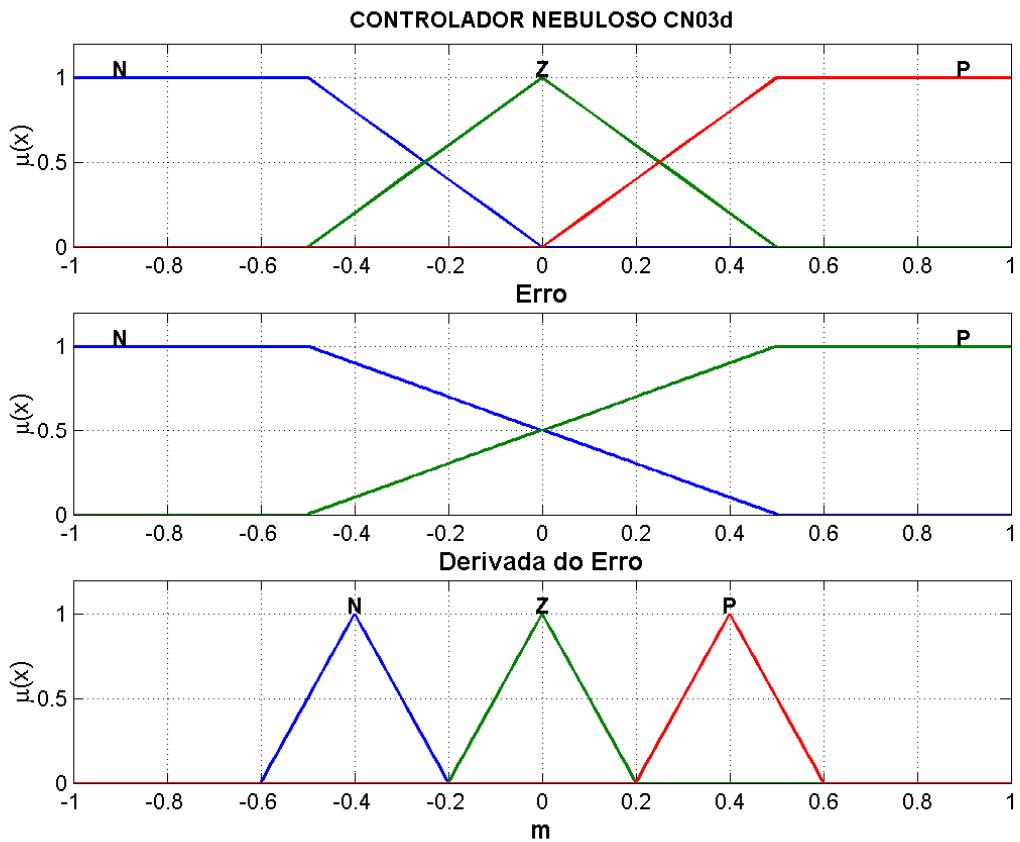


Figura 5.23 - Controlador CN03d

A Figura 5.24 ilustra as funções de pertinência deste controlador onde podemos perceber que diferem em formato e quantidade das funções do controlador CN01d.



**Figura 5.24 - Funções de pertinência do controlador CN03d**

Para o controlador descrito foi utilizado o seguinte conjunto de regras:

- R1: **se** "erro é N" e "derivada do erro é P" **então** "saída do controlador é Z"
- R2: **se** "erro é N" e "derivada do erro é N" **então** "saída do controlador é NL"
- R3: **se** "erro é Z" e "derivada do erro é P" **então** "saída do controlador é PS"
- R4: **se** "erro é Z" e "derivada do erro é N" **então** "saída do controlador é NS"
- R5: **se** "erro é P" e "derivada do erro é P" **então** "saída do controlador é PL"
- R6: **se** "erro é P" e "derivada do erro é N" **então** "saída do controlador é Z"

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=0,75$  para a variável erro;
- $K_D=1 \times 10^{-5}$  para variável derivada do erro;
- $K_{CM}=100$  para variável m (saída do controlador).

### 5.3.8. Controlador CN04d

O controlador CN04d foi projetado considerando o somatório de dois controles fuzzy, o primeiro, CN04PDd, que apresenta como entradas o erro e a derivada do erro e um segundo, CN04Id, que apresenta como entrada a integral do erro.

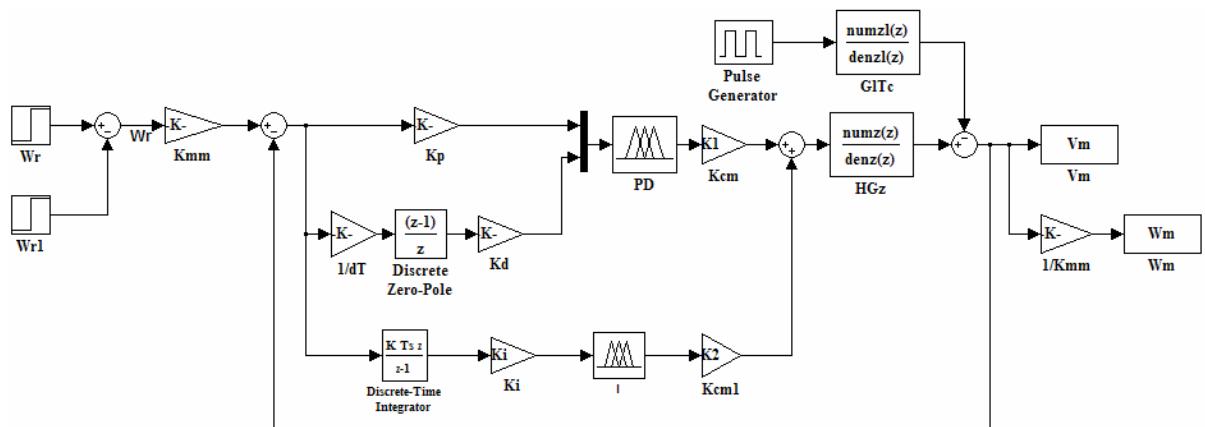


Figura 5.25 - Controlador CN04d

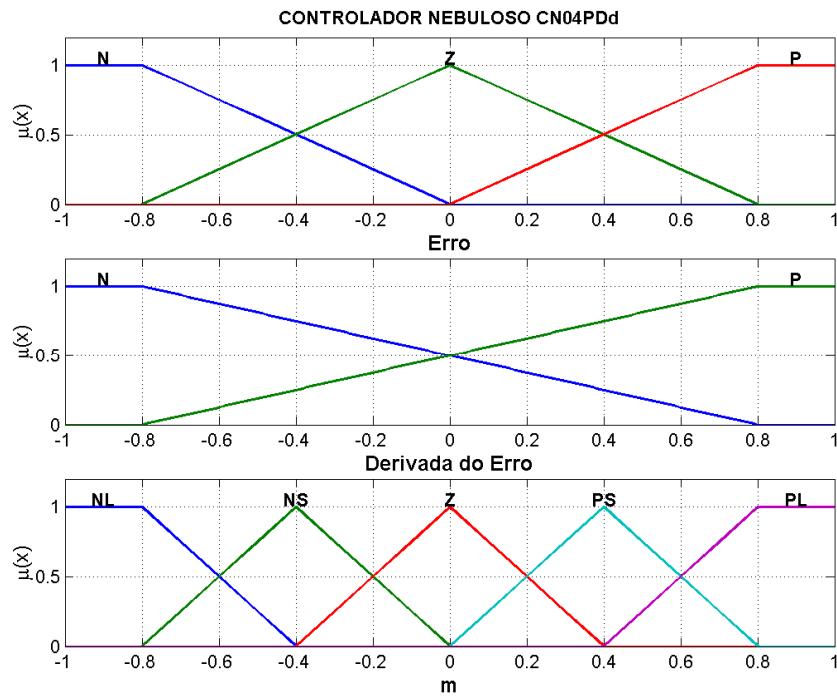
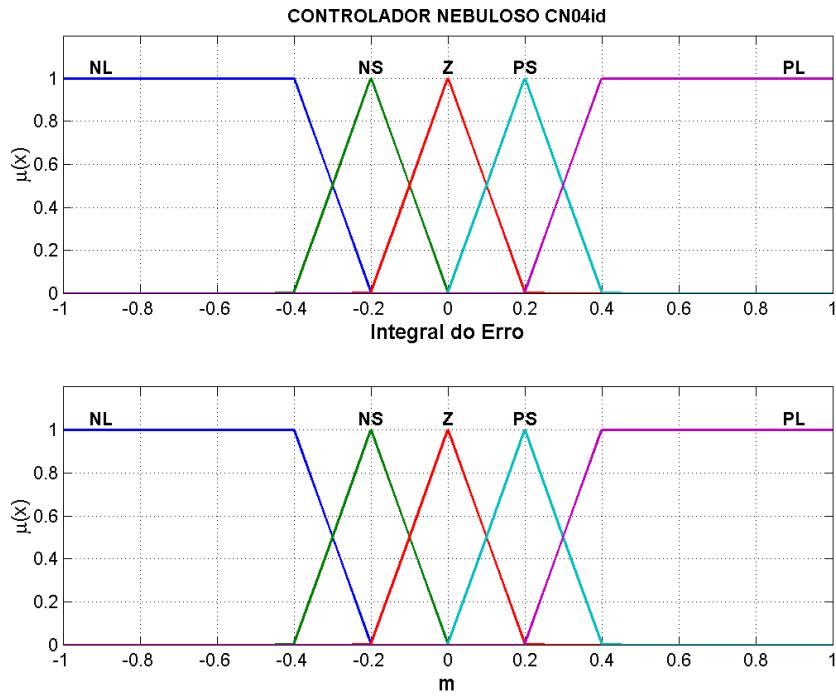


Figura 5.26 - Funções de pertinência do controlador CN04PDd



**Figura 5.27 - Funções de pertinência do controlador CN04Id**

A Figura 5.26 e a Figura 5.27 ilustram os conjuntos de pertinência para cada um dos controles fuzzy.

O seguinte conjunto de regras foi utilizado para o termo nebuloso do controlador CN04PDd:

- R1: **se** “erro é N” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é Z”
- R2: **se** “erro é N” **e** “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NL”
- R3: **se** “erro é Z” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PS”
- R4: **se** “erro é Z” **e** “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é NS”
- R5: **se** “erro é P” **e** “derivada do erro é P” **então** “saída do controlador é PL”
- R6: **se** “erro é P” **e** “derivada do erro é N” **então** “saída do controlador é Z”

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_p=1,75$  para a variável erro;
- $K_d=0,001$  para variável derivada do erro;
- $K_{CM}=250$  para variável m (saída do controlador).

Para o termo nebuloso do controlador CN04Id utilizamos o seguinte conjunto de regras:

- R1: **se** “erro é NL” **então** “saída do controlador é NL”
- R2: **se** “erro é NS” **então** “saída do controlador é NS”
- R3: **se** “erro é Z” **então** “saída do controlador é Z”
- R4: **se** “erro é PS” **então** “saída do controlador é PS”
- R5: **se** “erro é PL” **então** “saída do controlador é PL”

Os fatores de escala utilizados foram:

- $K_I=1$  para a variável integral do erro;
- $K_{ICM}=150$  para variável m (saída do controlador).

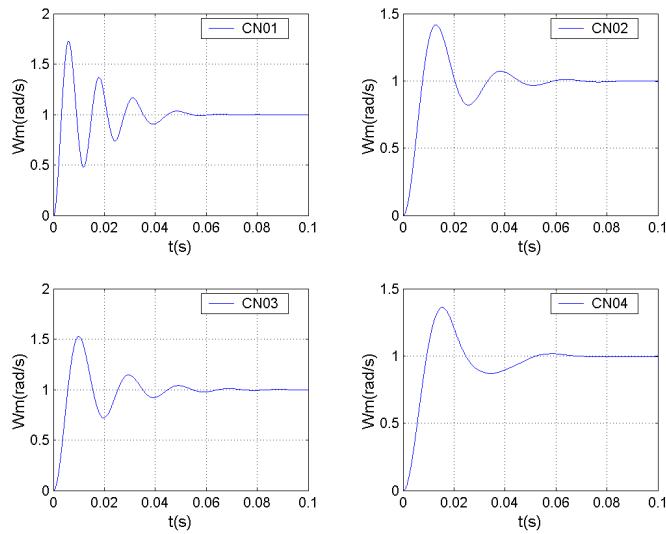
#### **5.4. Comparação dos controladores Nebulosos**

Os controladores nebulosos projetados foram submetidos a duas baterias de ensaios, utilizando o Simulink®, com objetivo de levantar parâmetros para posterior comparação. O modelo adotado para estas baterias de simulações foi o modelo em tempo contínuo do servossistema.

O algoritmo de integração utilizado foi o ODE23 com fator de refinamento unitário, tolerância relativa de  $1.10^{-3}$  e tolerância absoluta automática.

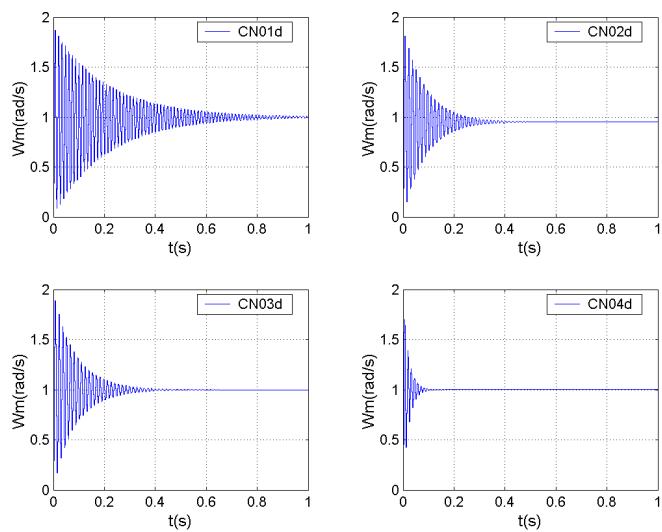
##### **5.4.1. Resultados da primeira bateria de simulações**

Na primeira bateria de simulações foi aplicado no instante  $t=0$  um degrau unitário no valor de referência a cada um dos sistemas. Foram levantados os máximos valores de sobre-sinal e tempo de acomodação para cada um dos sistemas, além disso, foram registrados os valores para o erro em regime permanente e os índices ITAE e ITSE da resposta de cada um dos controladores.



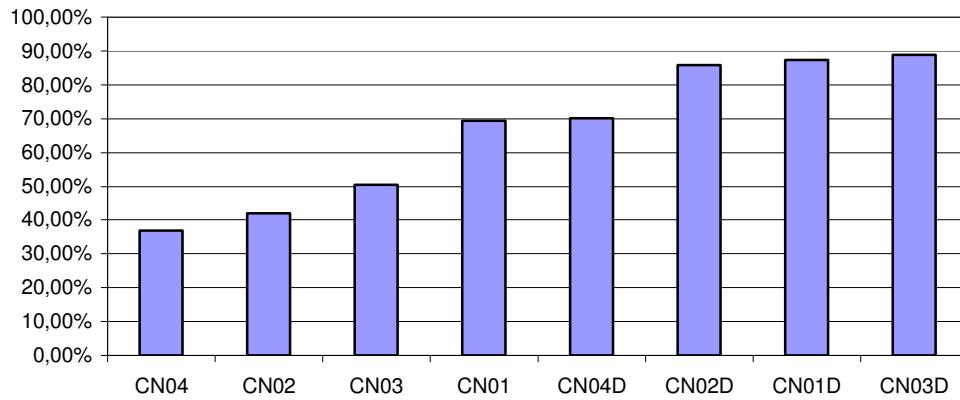
**Figura 5.28 – Resposta a degrau unitário – Controladores nebulosos analógicos**

A Figura 5.28 ilustra o resultado obtido para os controladores fuzzy analógicos projetados. A Figura 5.29 ilustra o resultado obtido para os controladores fuzzy digitais. Comparando os resultados notamos que todos controladores digitais apresentaram maior sobre-sinal que os controladores analógicos, bem como suas respostas apresentaram um caráter oscilatório muito mais acentuado que os controladores fuzzy analógicos.



**Figura 5.29 – Resposta a degrau unitário – Controladores nebulosos digitais**

A Figura 5.30 apresenta os valores obtidos para os máximos sobre-sinais dos oito controladores nebulosos (análogicos e digitais) obtidos para a resposta ao degrau.



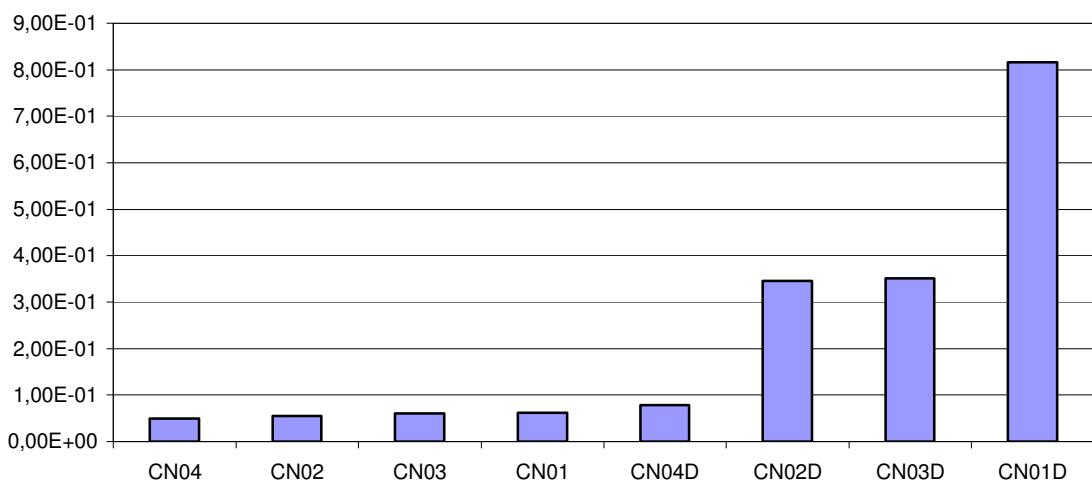
**Figura 5.30 - Sobre-sinal máximo dos controladores nebulosos**

Comparando os resultados obtidos verificamos que neste quesito os controladores analógicos apresentaram melhor desempenho que os digitais com exceção de CN01 que apresentou um sobre-sinal muito próximo de CN04D.

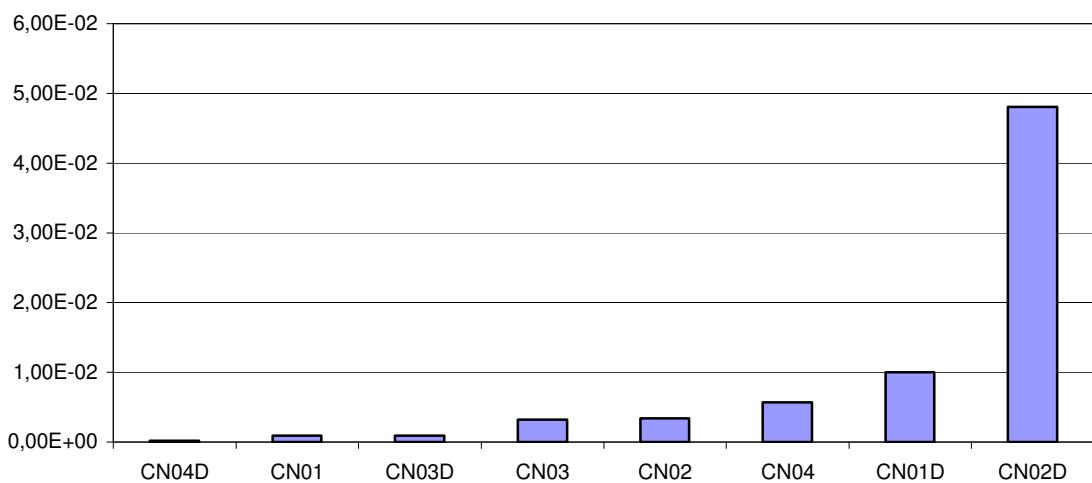
O controlador CN04 foi o que apresentou o menor sobre-sinal dentre os controladores nebulosos seguido do controlador CN02.

A Figura 5.31 apresenta os tempos de acomodação dos controladores nebulosos para a resposta ao degrau. Os tempos obtidos para os controladores nebulosos foram em geral superiores aos dos controladores PID analógicos (ver Figura 3.5).

O controlador CN04 apresentou o menor tempo de acomodação dentre os controladores nebulosos comparados, contudo apresentou um dos maiores erros estacionários como mostrado na Figura 5.32. Comparando os resultados obtidos nos controladores nebulosos com os controladores PID digitais (Figura 4.9) observamos que, com exceção do controlador CN01d, todos os outros controladores nebulosos apresentaram tempo de acomodação com a mesma ordem de grandeza daqueles.



**Figura 5.31 - Tempos de acomodação dos controladores nebulosos**

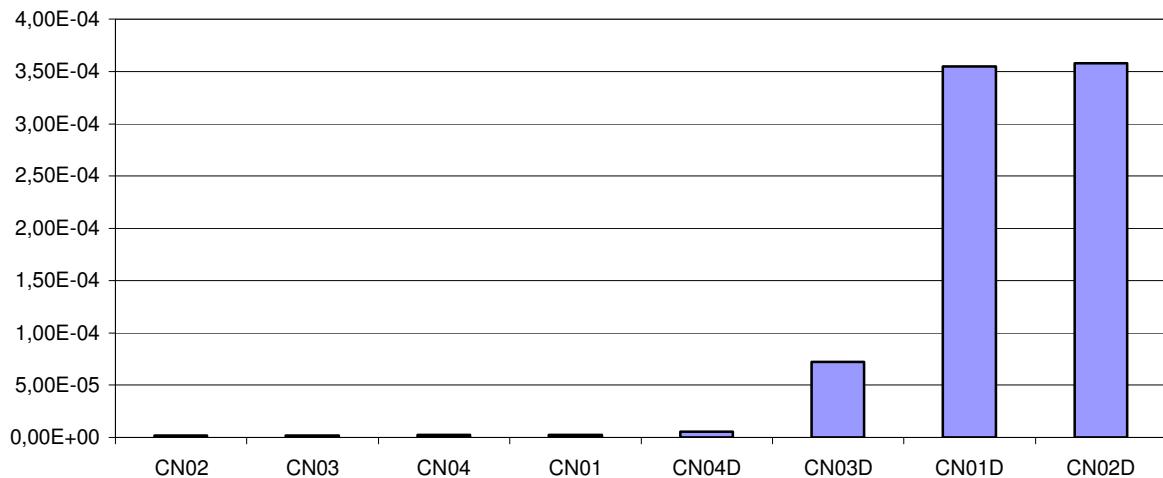


**Figura 5.32 - Erro em regime permanente dos controladores nebulosos**

Todos os controladores nebulosos apresentaram erro em regime estacionário, sendo que CN02D foi o que apresentou o maior erro.

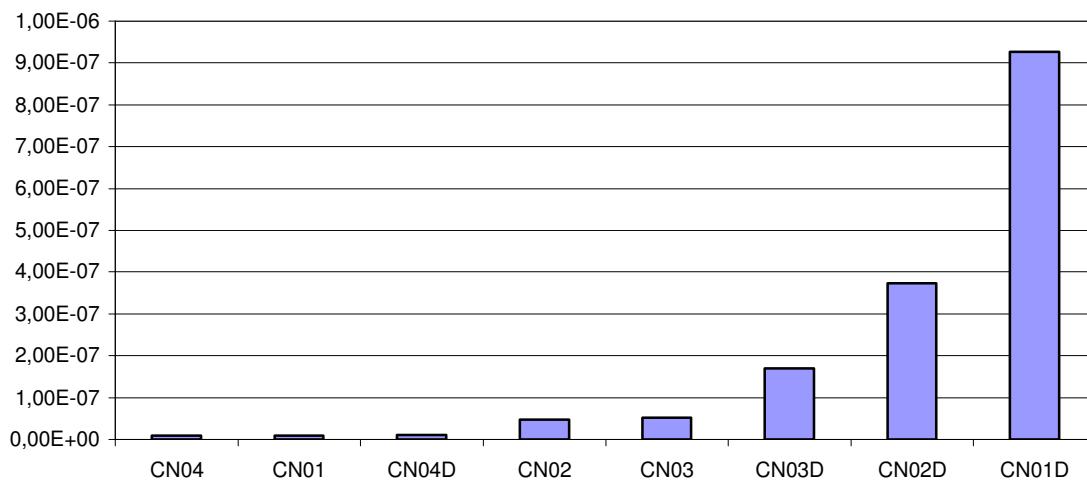
Os índices ITAE obtidos são apresentados na Figura 5.33. Observamos que, comparando com os resultados apresentados pelos controladores PID analógicos (Figura 3.7) e controladores PID digitais (Figura 4.11) verificamos que os todos os

controladores nebulosos digitais apresentaram desempenho semelhante aos controladores PID digitais e superiores aos analógicos.



**Figura 5.33 - Índices ITAE para os controladores nebulosos – 1a bateria**

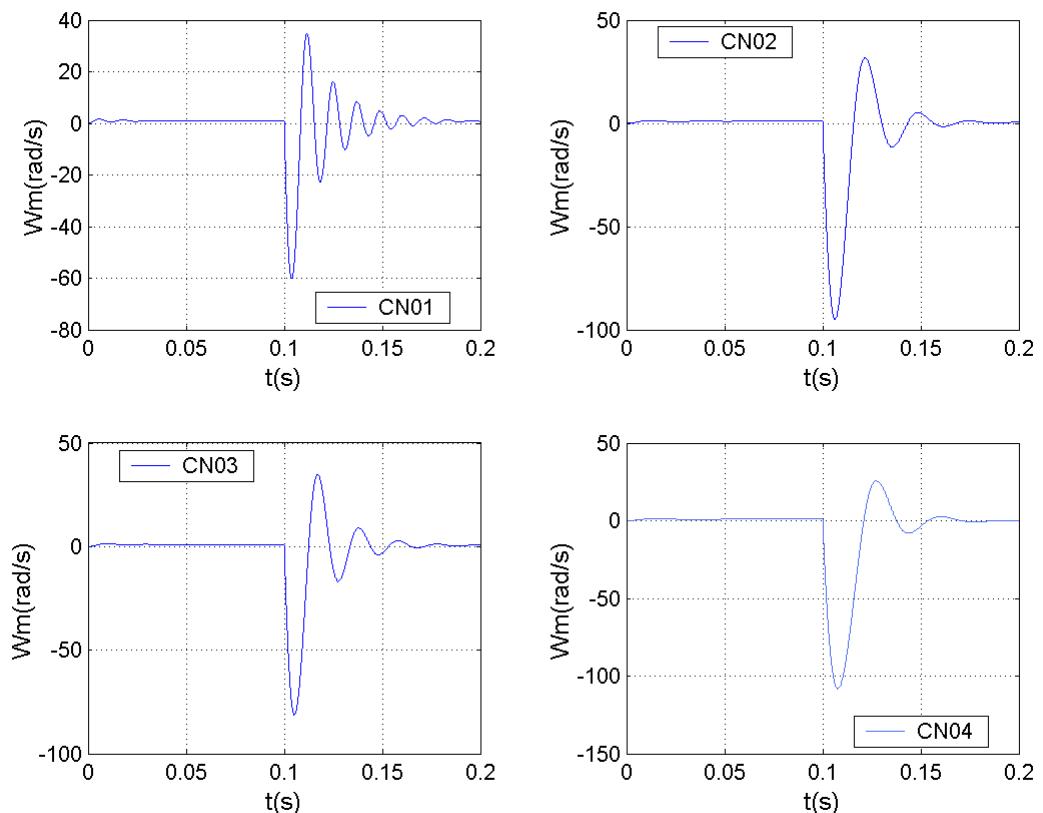
A Figura 5.34 apresenta os valores obtidos para o índice ITSE. Comparando com os controladores PID analógicos (Figura 3.8) e PID digitais (Figura 4.12) verificamos que para este índice todos os controladores nebulosos digitais apresentaram desempenho compatível aos controladores PID analógicos e digitais.



**Figura 5.34 - Índices ITSE para os controladores nebulosos – 1a bateria**

### 5.4.2. Resultados da segunda bateria de simulações

Na segunda bateria de simulações foi aplicado um degrau unitário no valor de referência em  $t=0$  e passado o tempo de acomodação aplicamos um degrau unitário na carga de forma a verificar o seu efeito na resposta do sistema.

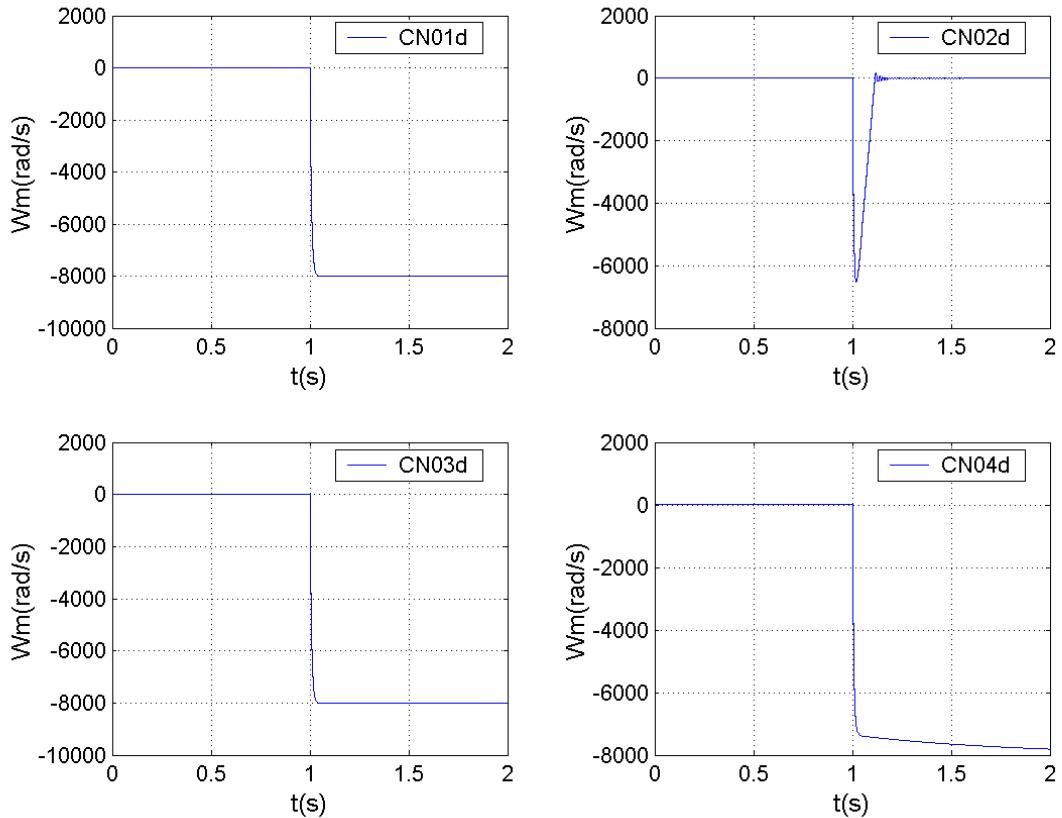


**Figura 5.35 – Resposta a degrau unitário e variação de 0,2 na carga – Controladores nebulosos analógicos**

A Figura 5.35 apresenta as formas de onda obtidas nos sistemas com controladores nebulosos analógicos quando submetidos à resposta a degrau e à variação de carga.

As oscilações produzidas pela introdução da carga são maiores que as ocorridas no controladores PID analógicos, porém bem menores do que as que ocorreram com os controladores PID digitais.

A Figura 5.36 apresenta as formas de onda obtidas, nas mesmas condições, para os controladores nebulosos digitais.

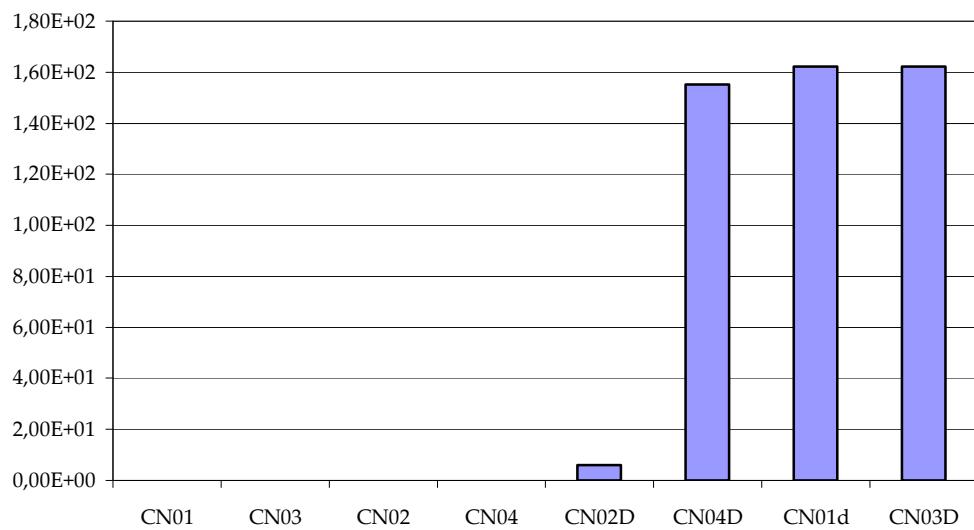


**Figura 5.36 – Resposta a degrau unitário e variação de 0,2 na carga – Controladores nebulosos digitais**

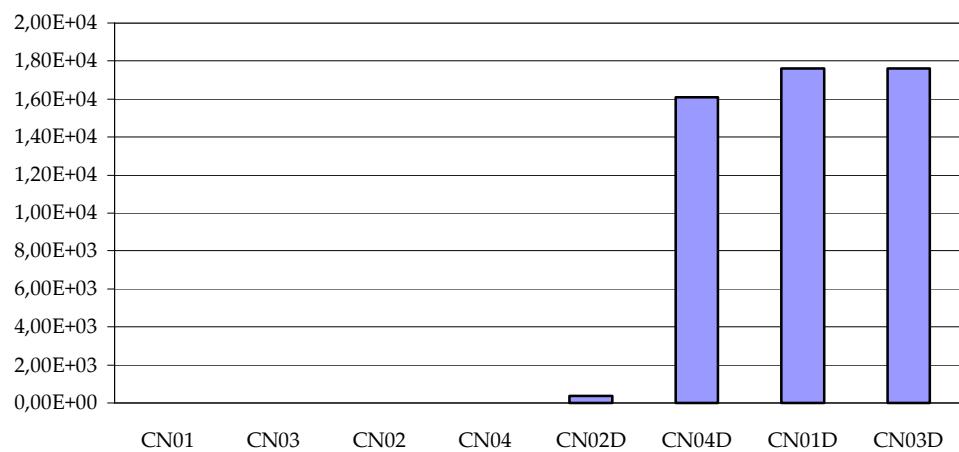
Todos os controladores nebulosos digitais apresentaram um fraco desempenho para variações na carga.

Os índices ITAE e ITSE foram levantados para a resposta de cada um dos controladores e os resultados são apresentados na Figura 5.37e na Figura 5.38

Podemos verificar o fraco desempenho para variações na carga dos controladores nebulosos digitais.



**Figura 5.37 - Índices ITAE obtidos com variação de carga – Controladores nebulosos**



**Figura 5.38 - Índices ITSE obtidos com variação de carga – Controladores nebulosos**

Todos os controladores nebulosos apresentaram fracos desempenhos para variações na carga em relação aos controladores PID (digitais ou analógicos)

## **5.5. Conclusões**

Segundo os índices ITAE e ITSE obtidos nas duas baterias de simulações o melhor controlador nebuloso foi CN01. CN02 e CN04 também apresentaram desempenhos satisfatórios, pois são os que mais vezes aparecem entre os melhores.

Vale ressaltar que mesmo o desempenho desses controladores na maioria dos casos foi inferior ao desempenho dos controladores PID.

Verificamos em geral que os controladores PID e PD apresentaram desempenhos superiores aos controladores nebulosos, por exemplo, para variações na carga os melhores desempenhos (considerando o ITAE e o ITSE) foram os dos controladores PID.

## 6. CONTROLE UTILIZANDO O SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE DADOS

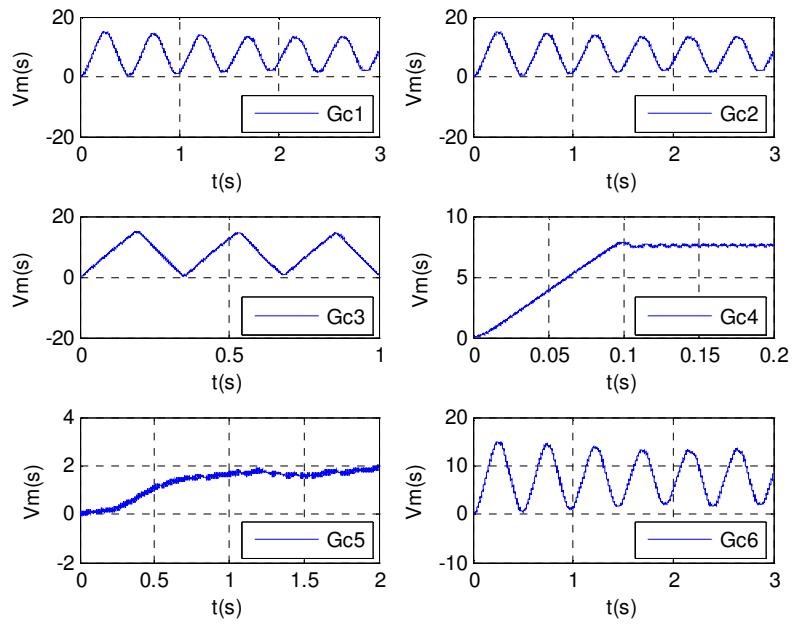
Para o desenvolvimento do controle por computador foi utilizado um kit de desenvolvimento educacional da National Instruments (ELVIS<sup>®</sup>) conforme já descrito anteriormente no item 2.6.

Para analisar o comportamento do sistema quando submetido aos diversos tipos de controladores projetados, foram efetuados ensaios do sistema quando submetidos a um degrau e em seguida com variação na carga.

### 6.1. Avaliação dos Controladores na Prática

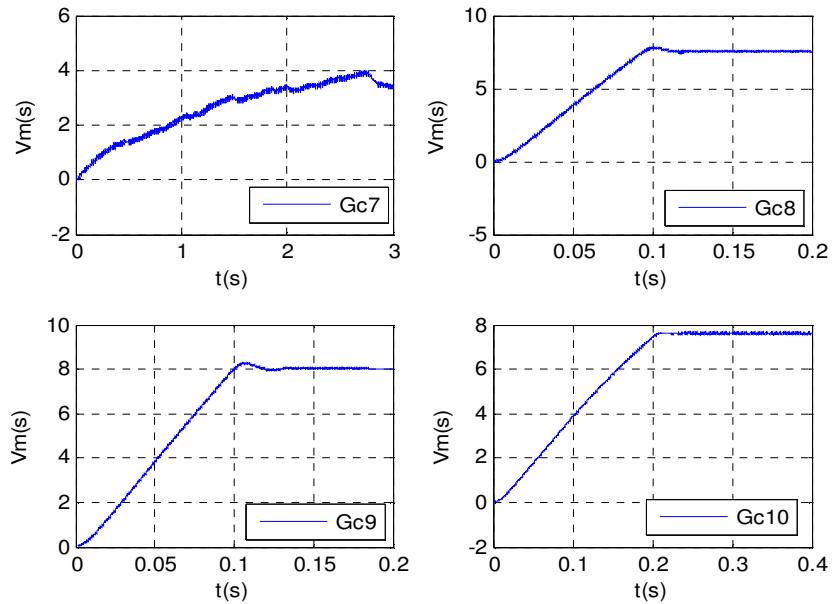
No ensaio a degrau a meta consiste em trabalhar com a tensão nominal no servomotor (12 V) o que corresponde a tensão medida no tacogerador de cerca de  $V_m = 7,6$  V. Por isto, para estes ensaios adotamos um *set point*  $SP = 7,6$ .

Ao efetuar os ensaios práticos com todos os controladores projetados observamos que em todos os casos o sistema controlado respondeu de forma muito mais lenta do que se esperava e em alguns casos apresentou instabilidade. A justificativa é imediata: na prática o sistema de controle está sujeito a várias limitações e não-linearidades como saturação, zona-morta, etc. Dentre estas não-linearidades devemos destacar a saturação do sinal de controle, o qual não pode exceder os limites da placa de aquisição, ou seja,  $\pm 10$  V. Para verificar este efeito, foram efetuadas simulações do sistema de controle considerando esta limitação no sinal de controle e também a utilização de um *set point* de 7,6 V. Os resultados obtidos para os controladores projetados pelo método de Ziegler-Nichols estão apresentados na Figura 6.1.



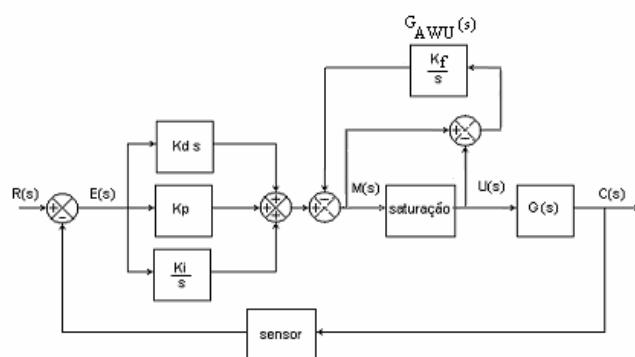
**Figura 6.1 – Simulação da resposta a degrau de 7,6 V – Controladores sintonizados pelo método de Ziegler-Nichols – Simulação com saturação do sinal de controle**

Os resultados obtidos para os controladores projetados pelo método de Sintonia Direta e Cancelamento de Pólos estão ilustrados na Figura 6.2.



**Figura 6.2 – Simulação da resposta a degrau de 7,6 V – Controladores sintonizados por Síntese Direta e Cancelamento de Pólos – Simulação com saturação do sinal de controle**

Analisando os resultados observamos que somente apresentaram resposta satisfatória os controladores projetados pelo método do cancelamento de pólos e o controle proporcional projetado pelo método de Ziegler Nichols. Todos os outros controladores tiveram seu desempenho comprometido pela saturação. Particularmente para os controladores que possuem componente integradora (PI e PID) podemos justificar a piora no desempenho. A componente de integração proporciona uma elevação no sinal de controle toda vez que o erro produzido pela diferença entre o setpoint e o sinal de realimentação proveniente do sensor for positivo (ou redução do sinal de controle se o erro for negativo). A taxa de variação do sinal de controle depende da amplitude do erro e também do valor da constante de integração ( $1/T_i$ ). Devido a esta variação do sinal de controle, este pode atingir os valores limites possíveis (por exemplo, atingir a máxima tensão produzida na saída de uma placa de aquisição do controlador). Quando isto acontece, mesmo com o aumento do sinal de controle, o valor que efetivamente irá atuar no sistema será diferente do sinal que efetivamente será aplicado ao sistema, ou seja, na Figura 6.3 temos  $U(s) \neq M(s)$ . Isto significa que enquanto  $M(s)$  continua atingindo valores em amplitude muito maiores o sinal em  $U(s)$  é mantido. O agravante é que, quando ocorrer inversão da polaridade do erro isto proporcionará redução no sinal de controle em  $M(s)$ , mas somente afetará  $U(s)$  quando finalmente o sinal de controle atingir valores dentro da faixa de operação sem saturação. Este efeito pode alterar consideravelmente o comportamento do sistema, podendo inclusive produzir instabilidade.

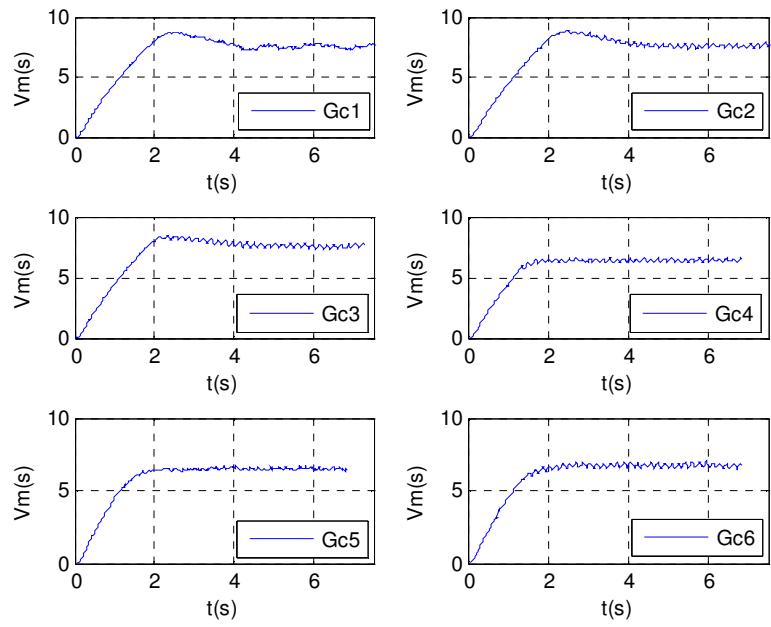


**Figura 6.3 – Diagrama de blocos de sistema hipotético com controle PID, saturação do sinal de controle e controle anti-windup**

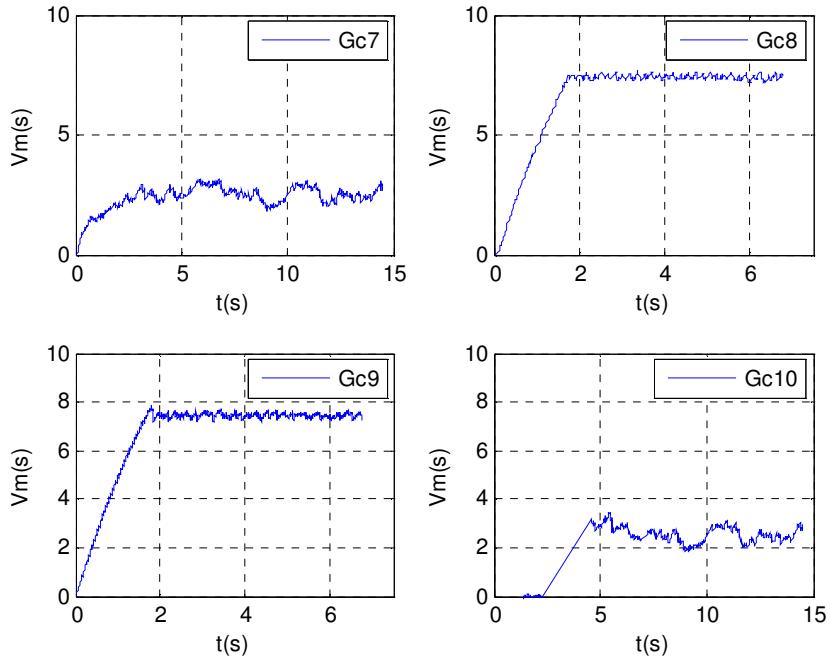
Para minimizar este efeito podemos introduzir no sistema os chamados compensadores *anti-windup* (ou *antireset windup*). Estes compensadores objetivam evitar que o sinal de controle atinja valores elevados quando ocorre a saturação. A estratégia de projeto consiste basicamente em anular o efeito da componente de integração para valores de sinal de controle que resultam em saturação. Para isto, devemos monitorar o sinal de controle para verificar quando a saturação ocorre e quando isto acontecer o erro de controle produzido ( $M(s) - U(s)$ ) deve ser multiplicado por uma componente de integração que irá subtrair o sinal de erro que será produzido futuramente de forma a evitar que o crescimento do erro de controle permaneça aumentando ao longo do tempo. Existem vários métodos de introdução do controle *anti-windup* e uma das alternativas é mostrada na Figura 6.3. Observamos que, se a saturação não estiver ocorrendo, o compensador *anti-windup* não tem efeito, pois  $M(s) = U(s)$ . O parâmetro  $K_f$  pode ser ajustado pelo projetista para garantir a eliminação da componente de integração no próximo instante de tempo. Uma estratégia comumente utilizada é ajustar  $K_f$  experimentalmente, por tentativa e erro, até que o efeito da saturação seja minimizado. Esta é a técnica utilizada para definir os controladores *anti-windup* que foram inseridos nos controladores  $G_{C1}$ ,  $G_{C2}$ ,  $G_{C3}$ ,  $G_{C7}$  e  $G_{C10}$ .

A Figura 6.4 ilustra os resultados práticos obtidos para os controladores analógicos projetados utilizando o método de Ziegler-Nichols, considerando degrau de 7,6 V, saturação do sinal de controle e controle *anti-windup* no caso dos controladores  $G_{C1}$ ,  $G_{C2}$  e  $G_{C3}$ . Os ganhos utilizados nos controladores *anti-windup* foram ajustados por tentativa e erro adotando-se em todos os casos  $G_{AWU} = 150$ .

A Figura 6.5 ilustra os resultados para os controladores projetados pelo método da Síntese Direta e por Cancelamento de Pólos. Nos controladores  $G_{C7}$  e  $G_{C10}$  não foi necessário utilizar controle *anti-windup*, pois o sistema não apresentou saturação no sinal de controle produzido, apresentando inclusive resposta não estável e com elevado erro estacionário. Observamos que os melhores resultados foram obtidos com os controladores  $G_{C4}$ ,  $G_{C5}$ ,  $G_{C6}$ ,  $G_{C8}$  e  $G_{C9}$ , pois apresentaram resposta rápida e sem oscilação.

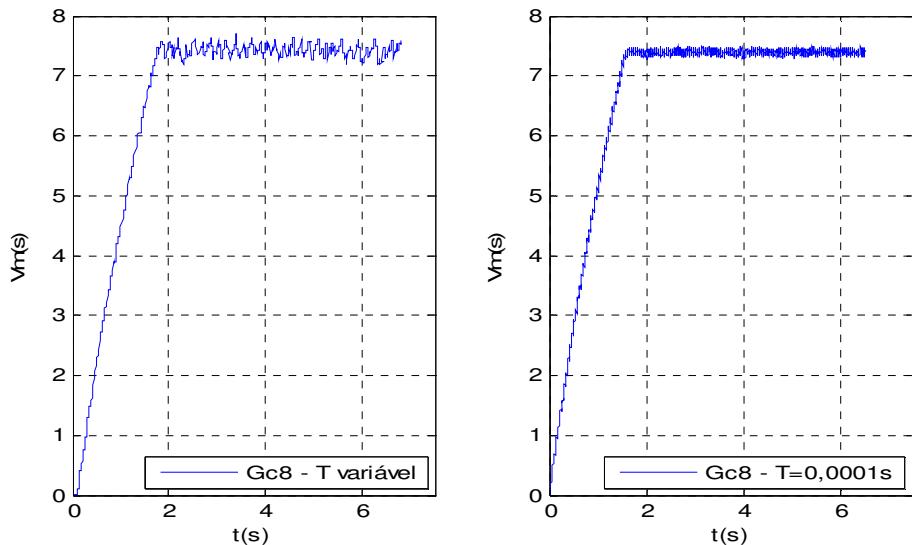


**Figura 6.4 – Resposta a degrau de 7,6 V – Controladores sintonizados pelo método de Ziegler-Nichols –  
Ensaio com sistema de aquisição de dados**



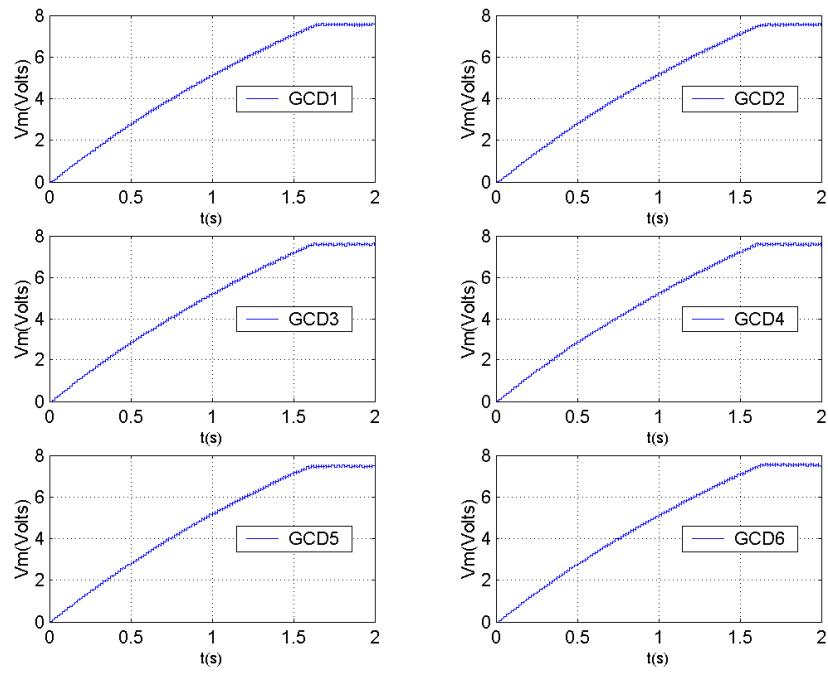
**Figura 6.5 – Resposta a degrau de 7,6 V – Controladores sintonizados por Síntese Direta e por  
Cancelamento de Pólos – Ensaio com sistema de aquisição de dados**

É importante destacar a necessidade de utilizar um tempo de amostragem apropriado. Em todos os resultados práticos o tempo de amostragem foi fixado em  $T=0,0001$ s. O desenvolvimento da aplicação utilizando aquisição de dados no LabVIEW® pode ser efetuado de forma muito mais fácil quando não há compromisso com o tempo de amostragem, por exemplo utilizando o modo *On Demand* onde o tempo de amostragem é variável, sendo definido pelo próprio computador. Em um dos testes obtivemos a resposta do controlador proporcional  $G_{C8}$ . Um comparativo entre os resultados obtidos no sistema com tempo de amostragem fixo em  $T = 0,0001$  s e utilizando o programa mais simples no modo *On Demand* é ilustrado na Figura 6.6. Note que nesta situação muitos pontos da aquisição são perdidos. No caso deste controlador não há considerável piora na estabilidade do sistema, contudo observamos que nenhum dos outros controladores analógicos permitiu controle estável na situação descrita acima, sem utilizar o tempo de amostragem apropriado.

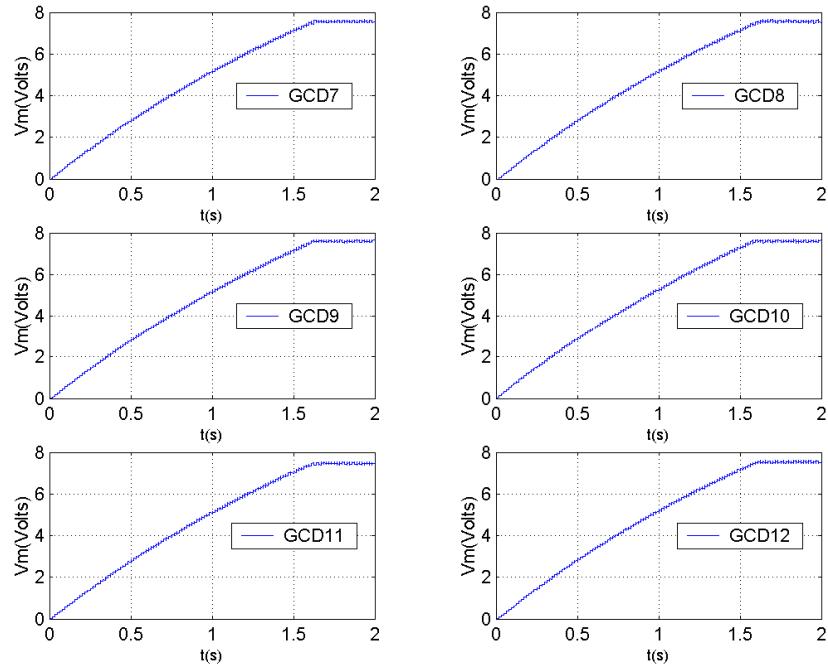


**Figura 6.6 – Resposta a degrau de 7,6 V – Controlador GC8 – Efeito da utilização do tempo de amostragem apropriado**

A Figura 6.7 e a Figura 6.8 ilustram as respostas obtidas para os controladores digitais inclusive com controle *anti-windup*  $G_{AWU} = 1/s$  no caso dos controladores que possuem componente integradora.



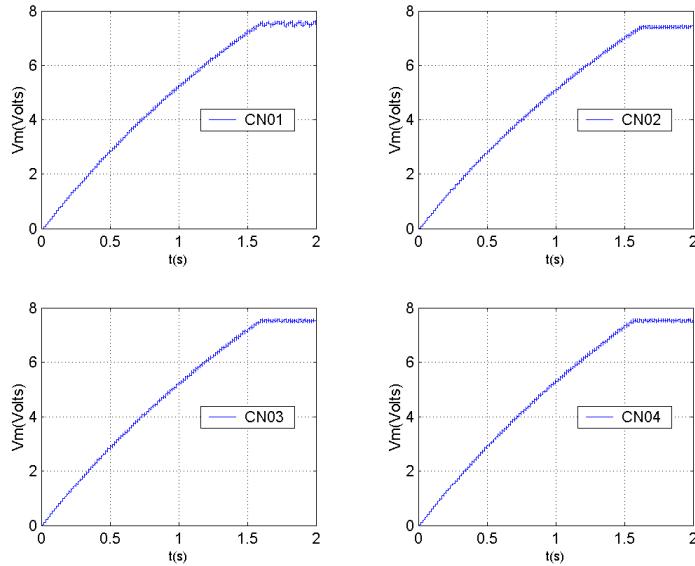
**Figura 6.7 – Resposta a degrau de 7,6 V – Controladores digitais projetados por Ziegler Nichols – Ensaio com sistema de aquisição de dados**



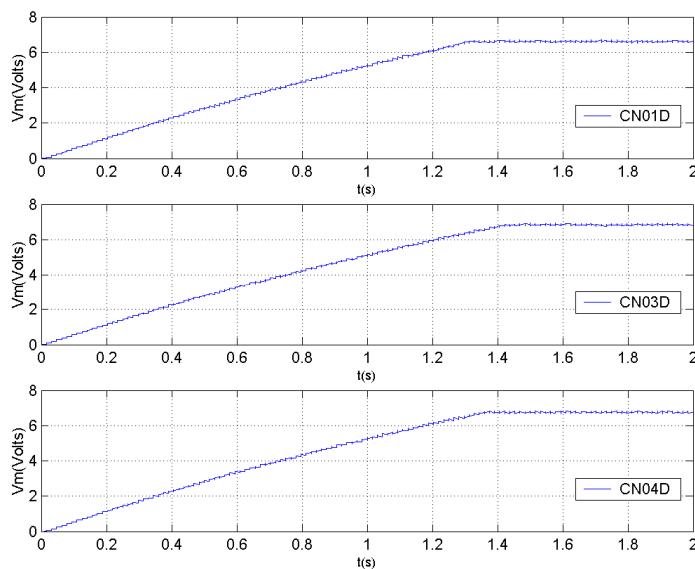
**Figura 6.8 – Resposta a degrau de 7,6 V – Controladores digitais emulados – Ensaio com sistema de aquisição de dados**

Todos os controladores digitais apresentaram respostas muito semelhantes e estáveis.

A Figura 6.9 e a Figura 6.10 ilustram as respostas obtidas para os controles fuzzy.



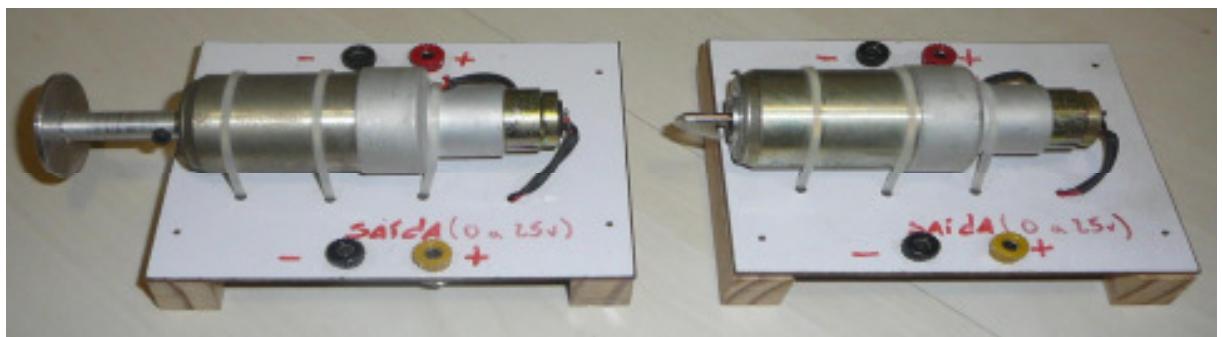
**Figura 6.9 – Resposta a degrau de 7,6 V – Controladores fuzzy analógicos – Ensaio com sistema de aquisição de dados**



**Figura 6.10 – Resposta a degrau de 7,6 V – Controladores fuzzy digitais – Ensaio com sistema de aquisição de dados**

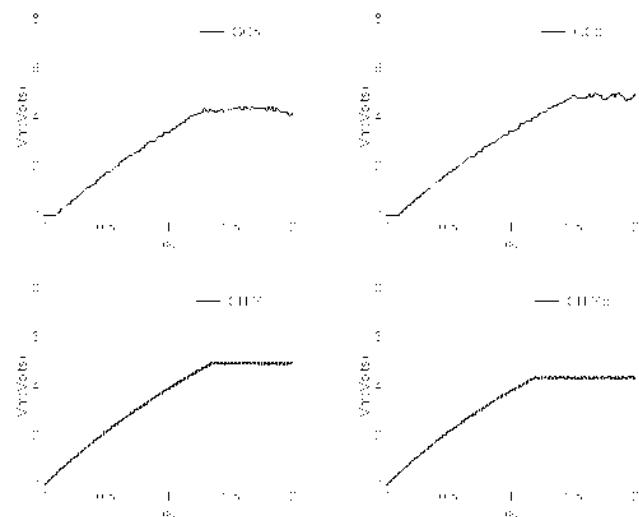
Notamos a semelhança entre a resposta dos controladores fuzzy e os controladores PID digitais.

Foram realizados ainda alguns ensaios para verificar a resposta de alguns controladores a variações na carga. Para tal foi utilizado um motor com um pequeno disco acoplado no eixo conforme pode ser observado na Figura 6.11.

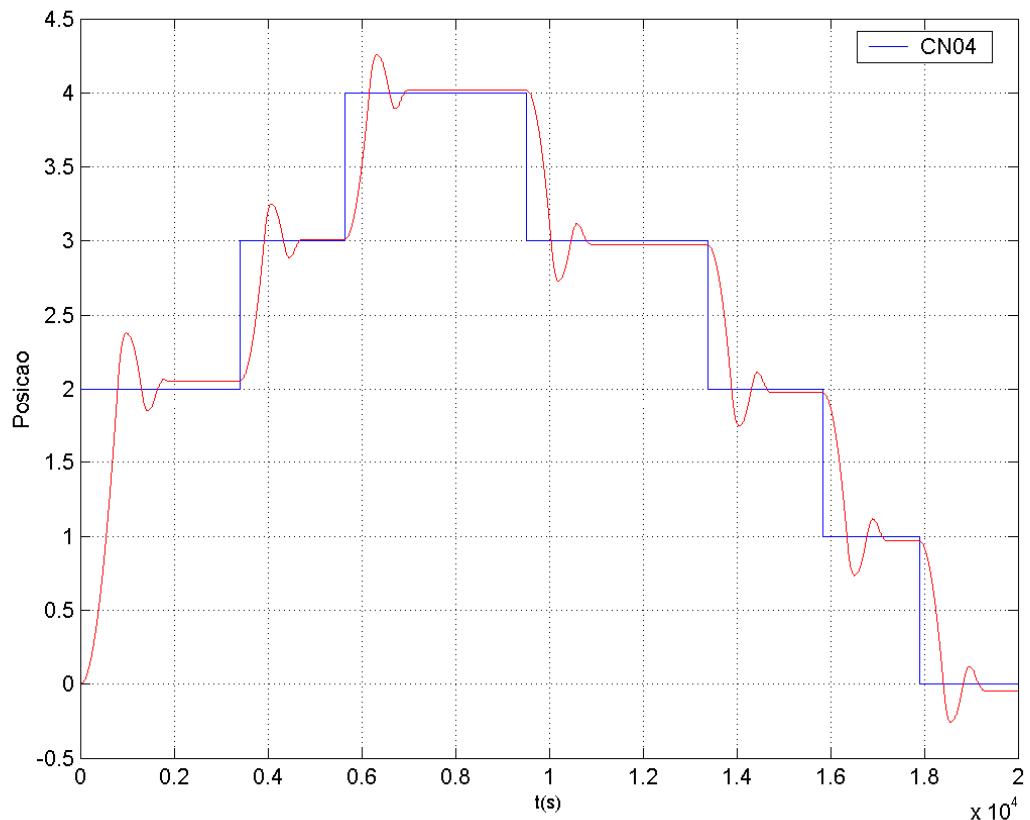


**Figura 6.11 - Motores utilizados na coleta de dados**

A Figura 6.12 ilustra as respostas dos controladores GC5, GC8, CN04 e CN04d , para um degrau de 5 volts, quando utilizamos um motor diferente. Percebemos que os controladores PID tiveram uma mudança sensível no comportamento enquanto que os controladores nebulosos não.



**Figura 6.12 - Resposta para variações na carga**



**Figura 6.13 - Controle de Posição**

A título de complemento e sugestão para continuação do trabalho introduzimos a forma computacional de um integrador após o sinal medido pelo sensor de velocidade; esta técnica permite desenvolver o sistema de controle de posição, sem a necessidade de substituir o tacogerador acoplado ao eixo do sistema, mas adaptando-o para medir o deslocamento angular. A Figura 6.13 ilustra a resposta do controlador CN04 para esta situação. Nenhum ajuste foi realizado nos ganhos do controlador CN04 por isso verificamos um erro estacionário elevado

## 7. CONCLUSÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal a avaliação de diversas técnicas de projeto e sintonia de controladores aplicados no controle de velocidade de um servomotor. O sistema inclui além do servomotor, um sistema de aquisição de dados, um sensor de velocidade acoplado ao motor, um programa de interface em LabVIEW® e circuito eletrônico de acionamento e amplificação de potência enviada para o motor. Na abordagem efetuamos a modelagem matemática de todos os dispositivos que compõem o sistema e a sintonia de diversos controladores PID e nebulosos utilizando métodos consagrados na literatura e em aplicações práticas na indústria.

Estes controladores foram avaliados por meio de critérios no domínio do tempo, erro em regime permanente e critérios de erro integrado utilizando o Simulink® do MatLab® software de simulação por computador.

Todos os controladores projetados foram avaliados por simulação e testados em sistema com aquisição de dados de forma a confirmar os resultados obtidos e estabelecer então uma análise comparativa entre os controladores.

Podemos concluir que em geral os controladores PID apresentaram um melhor desempenho em relação aos controladores nebulosos na simulação.

Na aquisição de dados devido à presença de não-linearidades tais como histerese e saturação do sinal de controle e ainda com a introdução da amostragem os controles fuzzy apresentaram um melhor desempenho, seguido dos controladores PID digitais (que são projetados considerando a amostragem) e por fim dos controladores PID analógicos.

A técnica de controle nebuloso mostrou ser uma alternativa viável para controle apresentando resultados semelhantes ao controle PID tradicional.

Os conceitos envolvidos neste trabalho possuem aplicabilidade prática no projeto de controladores para várias outras áreas tais como a indústria petroquímica, ar-condicionado e automação de processos contínuos.

Adicionalmente, a metodologia descrita neste trabalho pode ser aplicada em laboratórios de ensino de engenharia, conforme sugerido no artigo Assis et al, 2008 para o desenvolvimento de sistemas de controle similares. A abordagem prática em laboratório proporciona uma melhor assimilação dos conceitos teóricos vistos em sala, facilita a compreensão de todos os passos envolvidos no projeto e ao mesmo tempo em que permite a visualização de vários aspectos práticos geralmente não abordados em sala de aula.

Sugerimos como trabalhos de continuidade:

- introdução da forma computacional de um integrador após o sinal medido pelo sensor de velocidade; esta técnica permite desenvolver o sistema de controle de posição com relativa facilidade, sem a necessidade de substituir o tacogerador acoplado ao eixo do sistema, mas adaptando-o para medir o deslocamento angular;
- avaliação de outras técnicas de sintonia e projeto de controladores tais como compensadores de avanço e atraso de fase, controladores com sintonia automática, controladores adaptativos, controle por realimentação de estados, etc.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ASSIS, Wânderson de O., 1997, "Análise Comparativa de Estratégias de Controle para Acionamentos Industriais Utilizando Chopper", Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Brasil.
- [2] ASSIS, Wânderson de Oliveira; COELHO, Alessandra Dutra; LIMA, Fabio Roberto Garcia de, 2008, "Um programa didático para ensino de sistemas de controle em laboratório do curso de engenharia", Anais do XXXVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE 2008, São Paulo, Brasil.
- [3] ÅSTRÖM, Karl J.; HÄGGLUND, Tore. 1995. "PID Controllers: Theory, Design, and Tuning". Second Edition. Instrument Society of America. Research Triangle Park.
- [4] COELHO, Leandro dos S.; ALMEIDA, Otacílio da M.; COELHO, Antonio Augusto R., 2003. "Projeto e estudo de caso da implementação de um sistema de controle nebuloso", Revista Controle & Automação, Vol. 14 N° 1, Jan., Fev. e Março 2003, Brasil.
- [5] ERICKSON, Robert W.; MAKSIMOVIC, Dragan, 2000, "Fundamentals of Power electronics", Second Edition, Kluwer Academic Publishers, USA.
- [6] FITZGERALD, A.E.; KINGSLEY Jr, Charles; KUSKO, Alexander, 1971. "Máquinas elétricas". McGraw-Hill Ltda. Brasil.
- [7] FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; WORKMAN, Michael, 1998. "Digital Control of Dynamic Systems". Third Edition. Addison Wesley Longman, INC. CA, USA.
- [8] GARCIA, Cláudio, 2001. "Apostila da disciplina de controle de processos industriais – IAC304 da Escola de Engenharia Mauá". Brasil.
- [9] GARCIA, Cláudio, 1997. "Modelagem e simulação". EDUSP. Brasil.
- [10] J. G. ZIEGLER; N. B. NICHOLS, 1942. "Optimum Settings for Automatic Controllers". Trans. ASME, Vol. 64, pp. 759-768.
- [11] LANDER, Cyril W., 1996. "Eletrônica Industrial". Makron Books. Brasil.
- [12] NISE, Norman S., 2000. "Control Systems Engineering". Third Edition. John Wiley & Sons, NY, USA.
- [13] OGATA, Katsuhiko, 1998. "Engenharia de Controle Moderno". Terceira edição. Prentice Hall do Brasil.
- [14] OGATA, Katsuhiko, 1994. "Discrete-Time Control Systems". Prentice Hall, NJ, USA.
- [15] PASSINO, Kevin M.; YURKOVICH, Stephen, 1998, "Fuzzy Control", Addison Wesley Longman, INC. CA, USA.
- [16] POMILIO, J. Antenor, 2002. "Eletrônica de Potência". FEEC-Unicamp. Brasil
- [17] RASHID, Muhammad H., 1993, "Power Electronics – Circuits, devices, and applications". Prentice Hall. USA

- [18] SHAW, Ian S.; SIMÕES, Marcelo G., 1999, "Controle e Modelagem Fuzzy", Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil.
- [19] TSOUKALAS, Lefteri H.; UHRIG, Robert E., 1997. "Fuzzy and Neural Approaches in Engineering". John Wiley & Sons, NY, USA.
- [20] ZADEH, Lotfi A., 1965, "Fuzzy Sets", *Information and Control*, Vol. 8, pp 338-353, USA.
- [21] ZADEH, Lotfi A., 1975. "The Concepts of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning - I", *Information Sciences* 8, 199-249 USA.

## **ANEXO**

Programa de Desenvolvimento do Controle em LabVIEW®

