

**SILVIO CELSO PEIXOTO GOMES**

**LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES INCREMENTAL E SUA  
APLICAÇÃO NA SINTONIA DE  
CONTROLARES PID.**

**SÃO CAETANO DO SUL  
2009**

**SILVIO CELSO PEIXOTO GOMES**

**LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES INCREMENTAL E SUA  
APLICAÇÃO NA SINTONIA DE  
CONTROLARES PID.**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia Mauá do Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Processos Químicos e Bioquímicos.

Linha de Pesquisa: Análise e Controle de Processos Químicos.

Orientador: Prof. Dr. Fabrizio Leonardi

**SÃO CAETANO DO SUL  
2009**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

Gomes, Silvio Celso Peixoto

Lugar Geométrico das Raízes Incremental e sua aplicação na sintonia de controladores P.I.D / Silvio Celso Peixoto Gomes. – São Caetano do Sul, SP: CEUN-EEM, 2009. 61p.

Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia Mauá do Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia, São Caetano do Sul, SP, 2009.

1.Lugar Geométrico das Raízes Incremental 2. Sintonia PID  
3.Controlador de dois graus de liberdade I.Instituto Mauá de  
Tecnologia. Centro Universitário. Escola de Engenharia Mauá.

“felizes são aqueles que se  
aproximam das pessoas  
que detém a sabedoria”

O Autor.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico esta dissertação às minhas filhas Giovana e Isabela pelo amor e carinho de um pai a seus filhos.

À minha esposa Águeda que procurou me auxiliar da melhor forma possível, oferecendo apoio, contribuição e muita colaboração.

Aos meus pais, por sua insistência e incentivo em que eu continuasse a minha formação em educação.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela satisfação na construção desse trabalho, fruto de dedicação e perseverança.

Ao professor Dr. Cláudio Garcia, que me acolheu, primeiramente, e me concedeu a oportunidade de trabalhar com o Professor Dr. Fabrizio Leonardi.

Ao professor Dr. Fabrizio Leonardi, pela sua capacidade de orientação que me conduziu da melhor forma, por sua sabedoria brilhante, fazendo-me entender os momentos difíceis da condução do trabalho.

Ao professor Dr. Jaime José da Cruz, que ofereceu sua preciosa contribuição para a construção desse conhecimento.

À Escola de Engenharia Mauá, pela estrutura e recursos fornecidos e principalmente à direção do curso de pós-graduação strictu-senso.

À Fundação Salvador Arena, por seus preciosos recursos oferecidos e oportunidades de transformação no material humano.

Ao professor Valcir Shigueru Omori, por seu apoio, sua confiança e suas orientações.

Aos professores doutores Wilson Carlos da Silva Júnior e Daniel de Oliveira membros integrantes da Faculdade de Tecnologia Termomecânica por sua colaboração e auxílio na tomada de decisão e fechamento do trabalho.

## **RESUMO**

A proposta deste trabalho é propor a aplicação da propriedade incremental do método do Lugar Geométrico das Raízes no projeto de controladores do tipo PID – Proporcional, Integral e Derivativo. A técnica proposta de projeto tem duas etapas. Inicialmente deve-se submeter o sistema a uma excitação tipo degrau, a partir de um ensaio preliminar em malha fechada com um controlador proporcional. Em seguida, o projeto do controlador se desenvolve com a técnica de cancelamento de pólos, resultando numa lei de controle PID com dois graus de liberdade. Mostra-se que a dinâmica de acompanhamento do sinal de referência é próxima a um sistema de primeira ordem, nos casos para os quais a resposta do ensaio preliminar for próxima a um sistema de segunda ordem. Para ilustrar o procedimento proposto, são apresentados alguns projetos por meio de simulação e suas respostas, comparadas a outras técnicas de projeto de controladores PID. Como aplicação prática real considerou-se o controle de posição de um servomecanismo.

**Palavras chave:** Lugar Geométrico das Raízes Incremental, Sintonia PID, Controlador de dois graus de liberdade.

## ABSTRACT

This work discusses the Incremental Root Locus property and one application on PID controllers tuning. The proposed procedure for tuning PID controllers has two steps. Firstly it is necessary to perform a step response test using a proportional controller. In a second step the compensator design is performed by a zero-pole cancelling. The obtained control law is a two-degree-of-freedom PID controller with the setpoint tracking and disturbance rejection done by different dynamics. It is shown that the setpoint tracking exhibits a first order dynamic every time the preliminary test exhibits a response that could be approximated for a second order response whereas the one associated with the disturbance rejection exhibits a more complex dynamic since it includes the one from the preliminary test. As illustrations, some design projects were done by simulation and a practical application to a servo system position control is included.

**Keywords:** Incremental Root Locus, PID Tuning, Two-degree of freedom controller.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	CONTROLE EM MALHA ABERTA.....	05
FIGURA 2.2	CONTROLE EM MALHA FECHADA.....	06
FIGURA 2.3	FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DO CONTROLADOR ON-OFF.....	07
FIGURA 2.4	CONTROLADOR PID EM MALHA FECHADA.....	09
FIGURA 2.5	PADRÃO DE RESPOSTA AO DEGRAU.....	09
FIGURA 2.6	PARÂMETROS DA RESPOSTA EM MALHA ABERTA.....	10
FIGURA 2.7	PERÍODO CRÍTICO DA RESPOSTA DE MALHA FECHADA.....	11
FIGURA 2.8	ENSAIO EM MALHA FECHADA COM RELÉ.....	12
FIGURA 3.1	SISTEMA DE CONTROLE DE MALHA FECHADA.....	18
FIGURA 3.2	ANÁLISE DO LGR INCREMENTAL.....	21
FIGURA 3.3	DIAGRAMA EQUIVALENTE AO DO LGRI.....	21
FIGURA 3.4	LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES EM FUNÇÃO DO GANHO K .....	22
FIGURA 3.5	LUGAR DAS RAÍZES EM FUNÇÃO DE $\Delta K$ .....	22
FIGURA 3.6	ENSAIO PRELIMINAR.....	23
FIGURA 3.7	SISTEMA DE CONTROLE PROPOSTO.....	27
FIGURA 3.8	ESTRUTURA TDOF COM CONTROLADORES PID.....	28
FIGURA 3.9	CONTROLE COM PRÉ FILTRO.....	31
FIGURA 4.1	ESTRUTURA DO SISTEMA DE CONTROLE.....	33
FIGURA 4.2	ENSAIO PRELIMINAR.....	35
FIGURA 4.3	RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.....	36
FIGURA 4.4	RESPOSTA AO DISTÚRBIO.....	37
FIGURA 4.5	ENSAIO PRELIMINAR.....	39
FIGURA 4.6	RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.....	40
FIGURA 4.7	RESPOSTA AO DISTÚRBIO.....	41
FIGURA 4.8	ENSAIO PRELIMINAR.....	43
FIGURA 4.9	RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.....	44
FIGURA 4.10	RESPOSTA AO DISTÚRBIO.....	45
FIGURA 4.11	ENSAIO PRELIMINAR.....	47
FIGURA 4.12	RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.....	48
FIGURA 4.13	RESPOSTA AO DISTÚRBIO.....	49
FIGURA 4.14	TROCADOR DE CALOR CASCO-TUBO.....	50
FIGURA 4.15	ENSAIO PRELIMINAR.....	52
FIGURA 4.16	RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.....	53
FIGURA 4.17	RESPOSTA AO DISTÚRBIO.....	54
FIGURA 4.18	ENSAIO PRELIMINAR SISTEMA SERVO.....	56
FIGURA 4.19	DESEMPENHO EXPERIMENTAL SISTEMA SERVO.....	56
FIGURA 4.20	RESPOSTA DE UM SISTEMA SUBAMORTECIDO.....	57

## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1	PRIMEIRO MÉTODO DE ZIEGLER E NICHOLS.....	10
TABELA 2.2	SEGUNDO METODO DE ZIEGLER e NICHOLS.....	11
TABELA 2.3	SINTONIA PROPOSTA PELO METODO DE COHEN E COON.....	13
TABELA 2.4	CONSTANTES DO PROBLEMA REGULADOR.....	14
TABELA 2.5	CONSTANTES DO PROBLEMA SERVO.....	15
TABELA 2.6	SINTONIA DE TAVAKOLI E TAVAKOLI.....	15
TABELA 2.7	SINTONIA PID DA SÍNTESE DIRETA.....	16
TABELA 3.1	RESPOSTA DO SISTEMA COM AMORTECIMENTO CRÍTICO.....	26
TABELA 3.2	SINTONIA PID.....	29
TABELA 4.1a	DADOS COLETADOS – REFERÊNCIA.....	38
TABELA 4.1b	DADOS COLETADOS – DISTÚRBIO.....	38
TABELA 4.2a	DADOS COLETADOS – REFERÊNCIA.....	42
TABELA 4.2b	DADOS COLETADOS – DISTÚRBIO.....	42
TABELA 4.3a	DADOS COLETADOS – REFERÊNCIA.....	46
TABELA 4.3b	DADOS COLETADOS – DISTÚRBIO.....	46
TABELA 4.4a	DADOS COLETADOS – REFERÊNCIA.....	49
TABELA 4.4b	DADOS COLETADOS – DISTÚRBIO.....	50
TABELA 4.5a	DADOS COLETADOS – REFERÊNCIA.....	54
TABELA 4.5b	DADOS COLETADOS – DISTÚRBIO.....	54
TABELA 4.6	FÓRMULAS SIMPLIFICADAS DE SINTONA.....	58

## LISTA DE SÍMBOLOS

LGR – lugar geométrico das raízes

LGRI – lugar geométrico das raízes incremental

PID – Proporcional, Integral e Derivativo

TDOF – Two Degree of Freedom

$\theta$  – tempo morto da planta

$\tau$  – constante de tempo da planta

$\tau_c$  – constante de tempo desejada de malha fechada

K – ganho da planta

$\Delta K$  – variação do ganho  $K$

$K_g$  – ganho da função de transferência de malha fechada da malha interna

$K_{cr}$  – ganho crítico

$P_{cr}$  – período crítico

a – amplitude da oscilação crítica

$G(s)$  – planta

$A(s)$  – função de transferência do controlador por cancelamento de pólos e zeros

$C(s)$  – função de transferência do controlador

$F(s)$  – função de transferência de malha fechada da malha interna

$K_p$  – ganho proporcional do controlador PID

$K_i$  – ganho integral do controlador PID

$T_i$  – tempo de integração do controlador PID

$K_d$  – ganho derivativo do controlador PID

$T_d$  – tempo derivativo do controlador PID

$T_s$  – tempo de acomodação

$T$  – pseudo período da resposta subamortecida

$K_{pre}$  – ganho do ensaio preliminar

$K_{locus}$  – ganho do controlador LGRI.

$r(t)$  – sinal de referência da malha externa

$m(t)$  – sinal de saída do controlador

$u(t)$  – sinal de entrada da planta.

$d(t)$  – sinal de distúrbio

$e(t)$  – sinal de erro

$v(t)$  – sinal de referência da malha interna.

$\Delta v$  – variação do sinal  $v(t)$

$y(t)$  – sinal de saída da planta

$\Delta y$  – variação do sinal  $y(t)$

$T(s)$  – função de transferência de malha fechada da referência para a saída

$T_D(s)$  – função de transferência de malha fechada do distúrbio para a saída

$\sigma_d$  – módulo do valor da parte real do pólo complexo.

$\omega_d$  – módulo do valor da parte imaginária do pólo complexo.

$\sigma_a$  – origem das assíntotas.

$\Theta_a$  – ângulo das assíntotas.

# SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1.</b>	<b>PROPOSTA .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2.</b>	<b>MOTIVAÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.3.</b>	<b>OBJETIVO .....</b>	<b>2</b>
<b>1.4.</b>	<b>ESTRUTURA DO TEXTO .....</b>	<b>2</b>
<b>2.</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>3</b>
<b>2.1.</b>	<b>DEFINIÇÕES .....</b>	<b>3</b>
<b>2.2.</b>	<b>ESTRUTURAS DE CONTROLE .....</b>	<b>4</b>
<b>2.2.1.</b>	<b>MALHA ABERTA .....</b>	<b>4</b>
<b>2.2.2.</b>	<b>MALHA FECHADA .....</b>	<b>5</b>
<b>2.3.</b>	<b>AÇÕES DE CONTROLE .....</b>	<b>6</b>
<b>2.3.1.</b>	<b>CONTROLADOR ON-OFF .....</b>	<b>7</b>
<b>2.3.2.</b>	<b>CONTROLADOR PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO (PID) .....</b>	<b>7</b>
<b>2.4.</b>	<b>MÉTODOS DE SINTONIA DE CONTROLADORES PID .....</b>	<b>8</b>
<b>2.4.1.</b>	<b>MÉTODOS HEURÍSTICOS DE ZIEGLER E NICHOLS .....</b>	<b>9</b>
<b>2.4.2.</b>	<b>MÉTODO HEURÍSTICO DO RELÊ EM MALHA FECHADA .....</b>	<b>12</b>
<b>2.4.3.</b>	<b>MÉTODO HEURÍSTICO DE COHEN-COON .....</b>	<b>13</b>
<b>2.4.4.</b>	<b>MÉTODO HEURÍSTICO DA INTEGRAL DA FUNÇÃO DE ERRO .....</b>	<b>13</b>
<b>2.4.5.</b>	<b>MÉTODO ANALÍTICO DA SÍNTSESE DIRETA .....</b>	<b>16</b>
<b>2.4.6.</b>	<b>OUTROS MÉTODOS DE PROJETO PID .....</b>	<b>16</b>
<b>3.</b>	<b>MÉTODO DO LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES INCREMENTAL .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1.</b>	<b>MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1.1.</b>	<b>RESUMO DAS REGRAS DE CONSTRUÇÃO DO LGR .....</b>	<b>19</b>
<b>3.2.</b>	<b>PROPRIEDADE INCREMENTAL DO MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES .....</b>	<b>20</b>
<b>3.3.</b>	<b>O PROJETO DE CONTROLADORES PID BASEADO NO LGRI .....</b>	<b>22</b>
<b>3.3.1.</b>	<b>ENSAIO PRELIMINAR .....</b>	<b>23</b>
<b>3.3.1.1.</b>	<b>SISTEMAS SUBAMORTECIDOS .....</b>	<b>24</b>
<b>3.3.1.2.</b>	<b>SISTEMAS SUPERAMORTECIDOS .....</b>	<b>25</b>
<b>3.3.1.3.</b>	<b>SISTEMAS COM AMORTECIMENTO CRÍTICO .....</b>	<b>26</b>
<b>3.3.2.</b>	<b>CANCELAMENTO DE PÓLOS E ZEROS .....</b>	<b>27</b>

<b>3.4</b>	<b>O CONTROLADOR PID DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE (TDOF) .....</b>	<b>28</b>
<b>3.4.1.</b>	<b>ESTRUTURA DO CONTROLADOR TDOF .....</b>	<b>28</b>
<b>3.4.2.</b>	<b>LEI DE CONTROLE DO CONTROLADOR TDOF .....</b>	<b>29</b>
<b>3.4.3.</b>	<b>PID REAL.....</b>	<b>30</b>
<b>3.4.4.</b>	<b>DINÂMICA DA REJEIÇÃO AO DISTÚRBIO .....</b>	<b>30</b>
<b>4.</b>	<b>ANÁLISE DE DESEMPENHO .....</b>	<b>33</b>
<b>4.1.</b>	<b>DESEMPENHO VIA SIMULAÇÃO .....</b>	<b>33</b>
<b>4.1.1.</b>	<b>SISTEMA MARGINALMENTE ESTÁVEL .....</b>	<b>33</b>
<b>4.1.1.1.</b>	<b>PROJETO PID PELO MÉTODO DO RELÊ.....</b>	<b>34</b>
<b>4.1.1.2.</b>	<b>PROJETO LRG.....</b>	<b>34</b>
<b>4.1.1.3.</b>	<b>COMPARATIVO .....</b>	<b>36</b>
<b>4.1.2.</b>	<b>SISTEMA BENCHMARKING.....</b>	<b>38</b>
<b>4.1.2.1.</b>	<b>PROJETO PID PELO SEGUNDO MÉTODO DE ZIEGLER E NICHOLS .....</b>	<b>38</b>
<b>4.1.2.2.</b>	<b>PROJETO LRG.....</b>	<b>39</b>
<b>4.1.2.3.</b>	<b>COMPARATIVO .....</b>	<b>40</b>
<b>4.1.3.</b>	<b>SISTEMA COM RESPOSTA INVERSA .....</b>	<b>42</b>
<b>4.1.3.1.</b>	<b>PROJETO PID PELO SEGUNDO MÉTODO DE ZIEGLER E NICHOLS .....</b>	<b>42</b>
<b>4.1.3.2.</b>	<b>PROJETO LRG.....</b>	<b>43</b>
<b>4.1.3.3.</b>	<b>COMPARATIVO .....</b>	<b>44</b>
<b>4.1.4.</b>	<b>SISTEMA TÉRMICO COM TEMPO MORTO.....</b>	<b>46</b>
<b>4.1.4.1.</b>	<b>PROJETO PID PELO MÉTODO DE COHEN E COON.....</b>	<b>46</b>
<b>4.1.4.2.</b>	<b>PROJETO LRG.....</b>	<b>47</b>
<b>4.1.4.3.</b>	<b>COMPARATIVO .....</b>	<b>48</b>
<b>4.1.5.</b>	<b>SISTEMA TROCADOR DE CALOR.....</b>	<b>50</b>
<b>4.1.5.1.</b>	<b>PROJETO PID PELO MÉTODO DA SÍNTES DIRETA .....</b>	<b>51</b>
<b>4.1.5.2.</b>	<b>PROJETO LRG.....</b>	<b>51</b>
<b>4.1.5.3.</b>	<b>COMPARATIVO .....</b>	<b>52</b>
<b>4.2.</b>	<b>DESEMPENHO PRÁTICO .....</b>	<b>55</b>
<b>4.3.</b>	<b>FÓRMULAS SIMPLIFICADAS DE SINTONIA .....</b>	<b>57</b>
<b>5.</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>60</b>

# **1. INTRODUÇÃO**

Este capítulo apresenta a proposta deste trabalho que envolve a aplicação da propriedade incremental do método do lugar geométrico no projeto de controladores PID. Apresenta-se também aqui, a motivação, o objetivo e a estrutura do texto.

## **1.1. Proposta**

Investigar a aplicação da propriedade incremental do método do lugar geométrico das raízes (LGR) no projeto de controlador PID. Utilizando-se a propriedade incremental, podemos considerar que: dada uma posição da representação de pólos do LGR de um sistema em malha fechada, poderemos considerá-los como pólos de malha aberta para um novo problema de traçado do LGR. Essa propriedade conduz a uma característica incremental do próprio traçado do LGR. Na literatura clássica aparecem vários métodos de projeto de controladores PID. Definem-se basicamente duas classes de métodos. A classe dos métodos analíticos usa o modelo rigoroso da planta para o projeto do controlador. Baseando-se na teoria de controle linear, podemos dizer que, para realizar o projeto, será necessário conhecer os pólos, os zeros e o ganho da Planta.

Outros métodos utilizam um ensaio preliminar, e são normalmente designados por métodos heurísticos. Em geral, são mais adequados aos casos para os quais o modelo da planta é desconhecido, ou mesmo, quando a sua modelagem se torna inviável. Nessa classe de problemas podemos listar o método precursor de Ziegler e Nichols (1942) e o método de Cohen e Coon (1953).

## **1.2. Motivação**

Historicamente identificam-se dois métodos pioneiros de sintonia de controladores PID, apresentados por Ziegler e Nichols (1942). Essas técnicas foram amplamente utilizadas em aplicações industriais e oferecem condições favoráveis por conta de sua forma simples de utilização. Porém, podem ocorrer casos no qual o seu emprego venha a se tornar inviável.

O primeiro método apresentado é bastante restritivo, pois exige que a planta seja estável em malha aberta. Sendo assim, não deve possuir elementos integradores e não conter pólos no semi-plano direito  $s$ . Além disso, esse método exige que a resposta da planta ao um degrau de referência apresente um aspecto similar a uma letra “S”.

O segundo método exige que a planta alcance o limite de estabilidade em malha fechada de forma a exibir oscilações auto-sustentadas quando submetida a um controle proporcional. O método de sintonia proposto neste trabalho pode ser considerado menos restritivo quando comparado ao método de Ziegler e Nichols (1942), pois não exige que o sistema a ser controlado apresente na saída, oscilações auto-sustentadas e não exige a condição de estabilidade da planta em malha aberta.

As bases deste trabalho estão concentradas no método do Lugar Geométrico das Raízes e na utilização de sua propriedade no projeto de controladores do tipo PID.

### **1.3. Objetivo**

O principal objetivo deste trabalho é propor um método baseado na aplicação da propriedade incremental do LGR no projeto de controladores PID. A eficiência do controlador obtido é medida como a capacidade do sistema de acompanhar sinais de referência, rejeitar sinais de distúrbio, em função do esforço de controle solicitado.

### **1.4. Estrutura do Texto**

O capítulo um apresenta uma introdução com o propósito de promover um convite à leitura do texto.

O capítulo dois apresenta uma revisão bibliográfica dos sistemas de controle, evidenciando a malha de controle, alguns tipos de controladores e métodos clássicos de sintonia analíticos e heurísticos.

O capítulo três apresenta o método LGR e suas regras clássicas de construção do seu traçado, evidenciando a propriedade incremental.

O capítulo quatro analisa, via simulação, o desempenho do controlador PID projetado com base na propriedade incremental do LGR, em comparação com projetos de controladores PID sintonizados por meio de outras técnicas consolidadas da área de controle de processos. Faz-se também uma aplicação prática de controle de posição de um servomecanismo.

O capítulo cinco apresenta a conclusão e as possíveis contribuições futuras.

Por fim, as referências bibliográficas são apresentadas.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Esse capítulo apresenta um resumo sobre os fundamentos dos sistemas controle, suas definições básicas, estruturas típicas, tipos de ações de controle e uma revisão bibliográfica dos métodos de sintonia heurísticos e analíticos de controladores.

### **2.1. Definições**

O controle automático tem desempenhado um papel fundamental no avanço da engenharia e da ciência, sendo essencial, por exemplo, nas operações de controle de nível em reservatórios, pressão em vasos, temperatura e vazão dos diversos fluídos líquidos, sólidos e gasosos. Também estão presentes no controle de outras variáveis como é o caso da umidade, do potencial hidrogeniônico (pH), da viscosidade, entre outras.

A seguir, têm-se as definições básicas dos elementos e sinais típicos em um sistema de controle (OGATA, 2003)

Planta: um sistema a ser controlado, que pode ser parte ou um conjunto de equipamentos.

Controlador: elemento cuja função é restabelecer o valor da variável de saída do sistema de controle ao seu valor de referência, e rejeitar distúrbios.

Variável controlada: grandeza ou condição medida a ser controlada.

Variável manipulada: grandeza ou condição modificada pelo controlador.

Sinal de referência: representa, em função do tempo, os valores desejados para a variável controlada.

Distúrbio: sinal que tende a afetar de maneira adversa o valor da variável controlada de um sistema e sobre o qual não se pode agir.

Neste trabalho, considera-se também a seguinte definição:

Esforço de controle: intensidade máxima do sinal da variável manipulada.

## 2.2. Estruturas de Controle

Uma estrutura de controle, ou estratégia de controle, é o conjunto de elementos interligados de certa forma, com a função de realizar operações que permitam o controle do processo.

Nas representações formais dos sistemas de controle, empregam-se os diagramas de blocos. Porém, na documentação de plantas industriais, os sistemas de controle são normalmente representados na forma de diagramas de tubulação e instrumentação (P&ID).

Nos P&ID encontram-se, tipicamente, os seguintes elementos para representar uma sistema de controle (GARCIA, 2003).

Elemento primário: elemento de medição, ou transdutor, que converte a variável do processo em uma forma mensurável.

Transmissor: converte o valor da variável medida em um sinal eletrônico ou pneumático.

Conversor: converte um sinal em outro tipo de sinal.

Receptor: recebe o sinal transmitido e o disponibiliza para compor a ação de controle.

Elemento final de controle: atua diretamente no processo para realizar ação de controle.

Atuador: elemento com a função de operar os elementos finais de controle.

A seguir detalham-se as duas estratégias de controle que são fundamentais no desenvolvimento deste trabalho.

### 2.2.1. Malha Aberta

Segundo Dorf e Bishop (2001), um sistema de controle em malha aberta utiliza o controlador para fazer a saída acompanhar o sinal de referência de forma direta, sem usar nenhuma informação da variável controlada, ou seja, sem realimentação. A figura 2.1. mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle em malha aberta, em que  $C(s)$  é a função de transferência do controlador,  $G(s)$  a função de transferência da planta incluindo o atuador e o

sensor, e  $R(s)$  e  $Y(s)$  as transformadas de Laplace dos sinais  $r(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente.

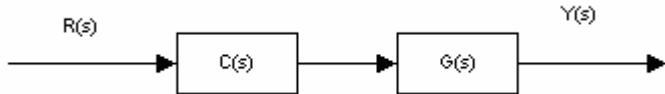


FIGURA 2.1 – CONTROLE EM MALHA ABERTA.

Algumas das vantagens do controle em malha aberta são:

- Possui custo reduzido, pois não é necessário medir a variável controlada.
- Não apresenta grandes dificuldades quanto à estabilidade, pois a estabilidade do sistema todo é dada pela estabilidade individual da planta e do controlador.
- O projeto do controlador é simples, e comumente determinado a partir da função inversa da planta.

Por outro lado, algumas das desvantagens do controle em malha aberta são:

- Não rejeita ruídos ou perturbações.
- Não compensa erros de modelagem.

Normalmente, os ruídos, perturbações e os erros de modelagem estão presentes numa situação real. Assim, o controle em malha aberta só é razoável quando as especificações de desempenho forem pouco restritivas.

### 2.2.2. Malha Fechada

Uma solução quando as especificações de desempenho são restritivas, é o emprego da realimentação.

Na estratégia de controle de malha fechada, o valor medido da variável controlada  $y(t)$ , é comparado com o valor de referência  $r(t)$  para com o erro,  $e(t) = r(t) - y(t)$ , o controlador determinar o valor da variável manipulada que deve ser uma ação corretiva para levar a variável controlada ao seu valor de referência. A figura 2.2. apresenta a estrutura típica de controle de malha fechada.

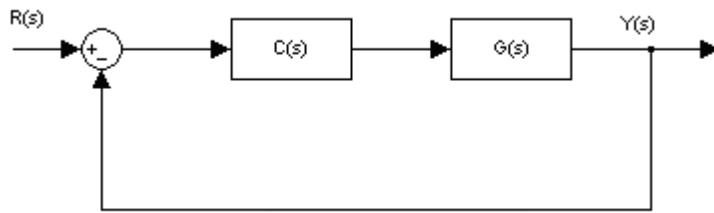


FIGURA 2.2 – CONTROLE EM MALHA FECHADA.

Algumas das vantagens do controle em malha fechada são:

- É possível compensar ruídos e perturbações.
- É possível compensar incertezas do modelo da planta, ou seja, é possível lidar com o problema de robustez.

Por outro lado, algumas das desvantagens do controle em malha fechada são:

- Possui custo superior quando comparado com o controle em malha aberta, pois é necessário usar um sensor para medir a variável controlada.
- Pode apresentar dificuldades quanto à estabilidade, pois a estabilidade do sistema de controle não é trivialmente dada pela estabilidade individual da planta e do controlador e, mesmo com essas duas funções estáveis, pode-se ter um sistema instável.
- O projeto do controlador normalmente é mais complexo que o da malha aberta.

Existem ainda várias outras estratégias de controle, a exemplo do controle em avanço, do controle em cascata e das estratégias usadas para sistemas multivariáveis. Entretanto, elas não foram incluídas nesta revisão por não estarem explicitamente relacionadas com os objetivos deste trabalho.

### 2.3. Ações de Controle

Nesta seção apresentam-se os controladores ON-OFF e PID, que são aqueles utilizados nos projetos e simulações ao longo deste trabalho.

### 2.3.1. Controlador On-Off

Sua operação é constituída por dois estados. Quando a variável controlada ultrapassa o valor de referência e vice-versa, a saída  $m(t)$  alterna seu estado que é caracterizado por um valor constante na saída do controlador. Um controlador On-Off pode atuar diretamente sobre elementos finais de controle do tipo válvula solenóide ou relê. Para se evitar oscilações em torno do erro nulo, é comum acrescentar-se uma histerese à função característica. A figura 2.3 ilustra a função característica de um controlador On-Off sem histerese.

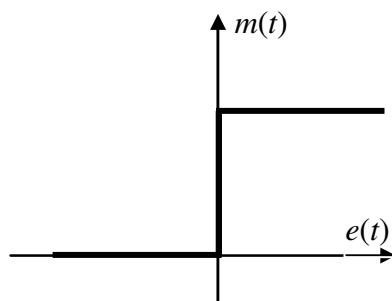


FIGURA 2.3 – FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DO CONTROLADOR ON-OFF.

### 2.3.2. Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

A lei de controle do controlador PID combina as ações proporcional, integral e derivativa. Por causa da ação integral, o controlador consegue fazer a saída da planta acompanhar, em regime, sinais constantes de referência, além de rejeitar, em regime, perturbações constantes de carga. A ação derivativa contribui para melhoria da velocidade de resposta e a ação proporcional afeta o erro de regime para entradas, por exemplo, do tipo rampa.

A equação 2.1 representa a função de transferência do controlador PID, em que  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  são os ganhos: proporcional, integral e derivativo, respectivamente.

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \quad (2.1)$$

A função de transferência do controlador PID é muitas vezes representada na sua forma equivalente da equação (2.2), em que  $T_i$  e  $T_d$  são os tempos: integral e derivativo, respectivamente.

$$C(s) = Kp \left( 1 + \frac{1}{s \cdot Ti} + s \cdot Td \right) \quad (2.2)$$

## 2.4. Métodos de Sintonia de Controladores PID

As principais especificações de desempenho a serem alcançadas por um controlador em malha fechada, segundo Altmann (2005), são, além de conferir estabilidade:

- reduzir o efeito do sinal de distúrbio;
- reduzir o transitório na saída da planta devido a uma variação do sinal de referência;
- reduzir o máximo sobressinal durante o regime transitório;
- reduzir o tempo de resposta do sistema em regime transitório;
- reduzir o erro em regime estacionário;

Para alcançar todas as especificações de desempenho, pode-se deparar com uma situação de conflito. Por exemplo, um ajuste que visa aperfeiçoar a resposta a um sinal de referência pode ser inadequado para uma boa rejeição de perturbações.

A literatura de controle de processo apresenta inúmeros métodos de projeto de controladores PID que se dividem basicamente em dois grupos: métodos heurísticos e analíticos. Considera-se aqui como método heurístico todo aquele que necessita de um ensaio preliminar com a planta para que da sua resposta se obtenham os valores notáveis necessários ao projeto. Os demais, que usam um modelo mais rigoroso da planta, são considerados aqui como métodos analíticos.

Os primeiros métodos heurísticos apareceram por volta de 1940, nas primeiras décadas de desenvolvimento de projeto de controladores e visam conferir uma taxa de decaimento de  $\frac{1}{4}$  nas amplitudes dos picos da oscilação do sinal de saída, cuja idéia é associada ao tradicional método de Ziegler e Nichols (1942). Todavia, relatam-se casos de sistema de ordem superior, cuja aplicação dessa sintonia pode levar a respostas com características indesejáveis, por exemplo, com um sobressinal superior a 70% ou muito oscilatórias, condições tipicamente não adequadas em aplicações de controle nas plantas industriais.

A seguir resumem-se os procedimentos de projeto de algumas das mais conhecidas técnicas de sintonia de controladores PID.

#### 2.4.1. Métodos Heurísticos de Ziegler e Nichols

Considere um sistema de controle com um controlador PID, conforme a figura 2.4, em que  $C(s)$  está na forma da equação 2.2.

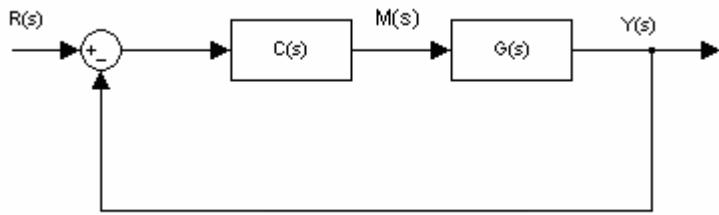


FIGURA 2.4 – CONTROLADOR PID EM MALHA FECHADA.

Ziegler e Nichols (1942) propuseram regras heurísticas de sintonia que permitem o ajuste dos parâmetros  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ . Suas regras são baseadas em experimentos de resposta ao degrau em malha aberta (primeiro método), ou em experimentos baseados no ganho de um controlador proporcional que leva o sistema à estabilidade marginal em malha fechada (segundo método).

No primeiro método deve-se obter uma resposta experimental da planta em malha aberta. Caso a resposta exiba um aspecto em “S”, como ilustrado na figura 2.5, esse método pode ser aplicado. Esse comportamento ocorre, normalmente, quando a planta não contém integradores, é estável e não possui pólos dominantes pouco amortecidos.

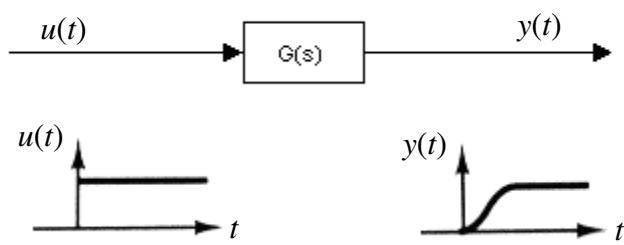


FIGURA 2.5 – PADRÃO DE RESPOSTA AO DEGRAU.

Se a resposta satisfaz essa condição de aspecto, o modelo linear da planta pode ser considerado aproximadamente

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}, \quad (2.3)$$

em que  $\theta$  é o tempo morto aparente,  $\tau$  a constante de tempo e  $K$  o ganho da função de transferência. Esses valores podem ser extraídos diretamente da curva de resposta, como indicado na figura 2.6.

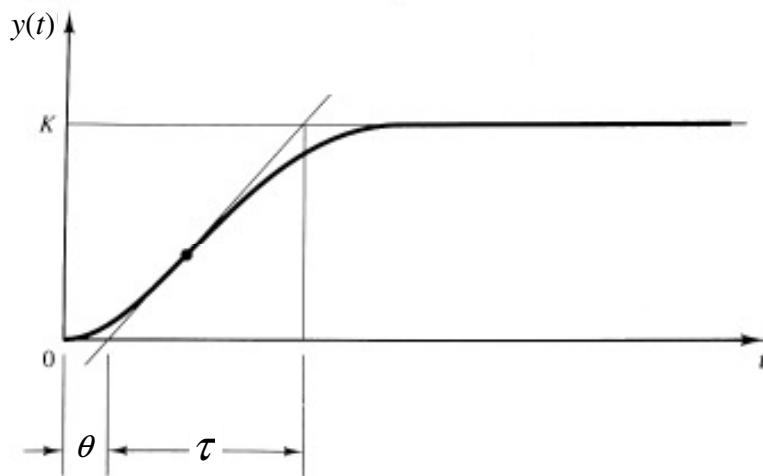


FIGURA 2.6 – PARÂMETROS DA RESPOSTA EM MALHA ABERTA.

A tabela 2.1 apresenta os valores sugeridos por Ziegler e Nichols (1942) para os ganhos do controlador PID em função dos valores notáveis da curva de resposta, mas também mostra os ganhos sugeridos, caso de controladores PI ou P.

TABELA 2.1 – PRIMEIRO MÉTODO DE ZIEGLER E NICHOLS

	<b>K<sub>p</sub></b>	<b>T<sub>i</sub></b>	<b>T<sub>d</sub></b>
<b>P</b>	$\frac{\tau}{\theta}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0,9\frac{\tau}{\theta}$	$\frac{\theta}{0,3}$	0
<b>PID</b>	$1,2\frac{\tau}{\theta}$	$2\theta$	$0,5\theta$

No segundo método procede-se um teste inicial em malha fechada com  $T_i = \infty$  e  $T_d = 0$ . Aumenta-se o valor de  $K_p$  desde zero até seu valor crítico  $K_{cr}$ , para o qual a saída

exibe pela primeira vez uma oscilação auto-sustentada de período  $P_{cr}$ , como ilustrado na figura 2.7.

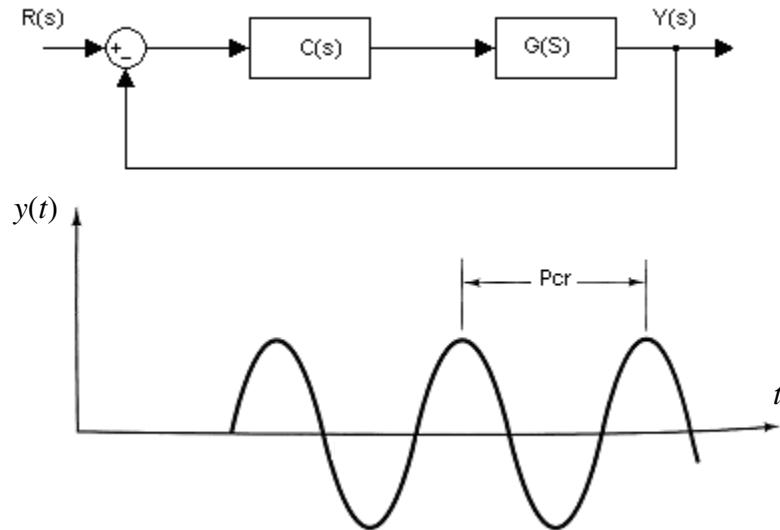


FIGURA 2.7 – PERÍODO CRÍTICO DA RESPOSTA DE MALHA FECHADA.

Caso a saída não exiba oscilação auto-sustentada para nenhum valor de  $K_p$ , então esse método não se aplica. A sintonia sugerida por Ziegler e Nichols (1942) no seu segundo método é resumida na tabela 2.2.

TABELA 2.2 – SEGUNDO MÉTODO DE ZIEGLER e NICHOLS

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0,5 K_{cr}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0,45 K_{cr}$	$\frac{1}{1,2} P_{cr}$	0
<b>PID</b>	$0,6 K_{cr}$	$0,5 P_{cr}$	$0,125 P_{cr}$

Note-se que o PID sintonizado pelo 2º método de Ziegler-Nichols resulta sempre em uma função de transferência com um pôlo na origem e dois zeros reais e iguais na posição  $s = -4/P_{cr}$ , conforme equação 2.4.

$$C(s) = 0,075 \ Kcr \ Pcr \frac{\left(\frac{s+4}{Pcr}\right)^2}{s} \quad (2.4)$$

#### 2.4.2. Método Heurístico do Relé em Malha Fechada

Em sua publicação, Aström e Hägglund (1988) apresentam um método de sintonia de controladores PID que ampliou as possibilidades do método das oscilações auto-sustentadas de Ziegler e Nichols, no sentido que o método permite obter o valor do período crítico  $Pcr$  e do ganho crítico  $Kcr$  por meio de um ensaio mais apropriado para as aplicações práticas. Esse ensaio preliminar é realizado em malha fechada com oscilações limitadas no qual o controlador opera como um relé que limita sua saída em  $\pm h$ , como ilustrado na figura 2.8.

Na prática, um controlador PID pode funcionar aproximadamente como um relé, fazendo-se máximos os valores de  $Kp$  e  $Ti$ , e anulando o valor de  $Td$ . Normalmente, também é possível ajustar o valor máximo da saída do controlador, permitindo que se escolha um valor conveniente para  $h$ .

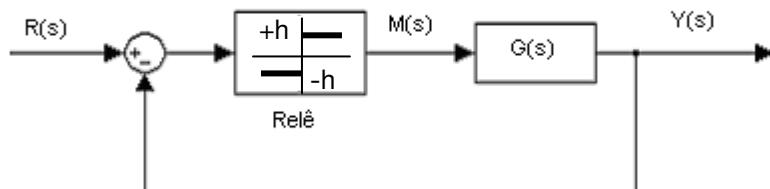


FIGURA 2.8 – ENSAIO EM MALHA FECHADA COM RELÉ.

O período da oscilação do sinal de saída  $y(t)$  é o próprio valor de  $Pcr$ . A amplitude  $a$  dessa oscilação influencia o valor de  $Kcr$ , conforme equação (2.5).

$$Kcr = \frac{4 h}{a \pi} \quad (2.5)$$

A partir dos valores de  $Kcr$  e  $Pcr$ , emprega-se os ganhos sugeridos por Ziegler e Nichols (tabela 2.2),

### 2.4.3. Método Heurístico de Cohen-Coon

O método Cohen e Coon (1953) é uma alternativa ao método proposto por Ziegler e Nichols (1942). Da mesma forma como o primeiro método de Ziegler e Nichols, o modelo aproximado da planta é considerado uma a função de transferência de primeira ordem com tempo morto (equação 2.3).

A tabela 2.3 apresenta as sintonias proposta por Cohen e Coon (1953) para as leis de controle P, PI, PD e PID.

TABELA 2.3 – SINTONIA PROPOSTA PELO METODO DE COHEN E COON

	<b>K<sub>p</sub></b>	<b>T<sub>i</sub></b>	<b>T<sub>d</sub></b>
<b>P</b>	$\frac{1}{K} \left( \frac{\tau + 1}{\theta} \right)$	0	0
<b>PI</b>	$\frac{1}{K} \left( \frac{0.9\tau + 1}{\theta} \right)$	$\frac{10 + \theta}{3\theta - \frac{20\theta}{9 + \frac{\tau}{\theta}}}$	0
<b>PD</b>	$\frac{1}{K} \left( \frac{1.25\tau + 1}{\theta} \right)$	0	$\frac{3 - \theta}{2\theta - \frac{\tau}{3\theta} - \frac{22 + \tau}{\theta}}$
<b>PID</b>	$\frac{1}{K} \left( \frac{4\tau + 1}{3\theta} \right)$	$\frac{32 + \frac{6\theta}{\tau}}{13 + \frac{8\theta}{\tau}}$	$\frac{4\theta}{11 + \frac{2\theta}{\tau}}$

### 2.4.4. Método Heurístico da Integral da Função de Erro

Os métodos heurísticos apresentados nas seções anteriores foram concebidos de forma a proporcionar uma resposta de malha fechada com um decaimento dos seus picos na razão de  $\frac{1}{4}$ . Esse critério leva ao grande inconveniente de respostas muito oscilatórias. Como alternativa a esse critério, se usam os índices integrais (SEBORG; EDGAR; MELLICHAMO, 1989)

$$ISE = \int_0^{t_f} (e(t))^2 dt, \quad (2.6)$$

$$IAE = \int_0^{t_f} |e(t)| dt, \quad (2.7)$$

$$ITAE = \int_0^{t_f} t |e(t)| dt, \quad (2.8)$$

em que, ISE é a integral do quadrado do erro, IAE é a integral do valor absoluto do erro, e ITAE é a integral do valor absoluto do erro multiplicado pelo tempo. Note-se que o índice ITAE penaliza os erros que persistem mesmo com o passar do tempo.

O método heurístico de sintonia de controladores PID baseado nos critérios integrais da função do erro são aplicáveis a plantas de primeira ordem com tempo morto. Segundo Lopez, et al., (1967, apud GARCIA, 2003), as expressões das equações 2.9 a 2.11 definem a sintonia PID recomendada para o problema regulador, ou seja, para variações na carga. As constantes A, B, C, D, E, e F estão listadas na tabela 2.4 (GARCIA, 2003).

$$K.K_p = A \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^B, \quad (2.9)$$

$$\frac{\tau}{Ti} = C \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^D, \quad (2.10)$$

$$\frac{Td}{\tau} = E \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^F. \quad (2.11)$$

TABELA 2.4 – CONSTANTES DO PROBLEMA REGULADOR

		<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
<b>PI</b>	<b>ISE</b>	1,305	-0,960	0,492	-0,739	–	–
<b>PI</b>	<b>IAE</b>	0,984	-0,986	0,608	-0,707	–	–
<b>PI</b>	<b>ITAE</b>	0,859	-0,977	0,674	-0,680	–	–
<b>PID</b>	<b>ISE</b>	1,495	-0,945	1,101	-0,771	0,560	1,006
<b>PID</b>	<b>IAE</b>	1,435	-0,921	0,878	-0,749	0,482	1,137
<b>PID</b>	<b>ITAE</b>	1,357	-0,947	0,842	-0,738	0,381	0,995

Segundo Rovira, et al., (1969, apud GARCIA, 2003), as expressões das 2.12 a 2.14 definem a sintonia PID recomendada para o problema servo, ou seja, para variações do sinal de referência. As constantes A, B, C, D, E, e F estão listadas na tabela 2.5. (GARCIA, 2003)

$$K.Kp = A \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^B, \quad (2.12)$$

$$\frac{\tau}{Ti} = C + D \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^D, \quad (2.13)$$

$$\frac{Td}{\tau} = E \left( \frac{\theta}{\tau} \right)^F, \quad (2.14)$$

TABELA 2.5 – CONSTANTES DO PROBLEMA SERVO

		<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
<b>PI</b>	<b>IAE</b>	0,758	-0,861	1,02	-0,323	–	–
<b>PI</b>	<b>ITAE</b>	0,586	-0,916	1,03	-0,165	–	–
<b>PID</b>	<b>IAE</b>	1,086	-0,869	0,74	-0,13	0,348	0,914
<b>PID</b>	<b>ITAE</b>	0,965	-0,85	0,796	-0,1465	0,308	0,929

Em seu artigo, Tavakoli e Tavakoli (2003 apud CAMPOS e TEIXEIRA, 2006) executam uma análise dimensional para determinar uma sintonia ótima para controladores PID baseada nos critérios IAE e ITAE para o problema servo de sistemas de primeira ordem com tempo morto. A tabela 2.6 apresenta os parâmetros sugeridos.

TABELA 2.6 – SINTONIA DE TAVAKOLI E TAVAKOLI

<b>Fator Adimensional</b>	<b>IAE</b>	<b>ITAE</b>
$Kp K =$	$\frac{1}{\left( \frac{\theta}{\tau} \right) + 0,2}$	$\frac{0,8}{\left( \frac{\theta}{\tau} \right) + 0,1}$
$\frac{Ti}{\theta} =$	$\frac{0,3 \left( \frac{\theta}{\tau} \right) + 1,2}{\left( \frac{\theta}{\tau} \right) + 0,08}$	$0,3 + \frac{1}{\left( \frac{\theta}{\tau} \right)}$
$\frac{Td}{\theta} =$	$\frac{1}{90 \left( \frac{\theta}{\tau} \right)}$	$\frac{0,06}{\left( \frac{\theta}{\tau} \right) + 0,04}$

#### 2.4.5. Método Analítico da Síntese Direta

Neste trabalho considera-se que um método é classificado como analítico se ele requer um modelo mais rigoroso da planta que aquele obtido por poucos parâmetros de um ensaio preliminar, como é o caso dos métodos aqui denominados de heurísticos.

O método da Síntese Direta busca definir a função de transferência de malha fechada para impor a resposta de malha fechada.

Ao especificar a resposta desejada, é necessário verificar se o controlador resultante é realizável, ou seja, se não possui um tempo morto positivo (não causal) ou termos de diferenciação pura com mais zeros que pólos na função de transferência.

A partir dos modelos padrões de plantas representadas na tabela 2.7, obtêm-se a sintonia dos controladores. No caso, as plantas de primeira ordem, e primeira ordem com tempo morto, admitem apenas sintonia PI. Plantas de segunda ordem, e segunda ordem com tempo morto, admitem apenas sintonia PID.

TABELA 2.7 –SINTONIA PID DA SÍNTSE DIRETA

Modelo da Planta	Parâmetros do controlador PID		
	Kp	Ti	Td
$G(s) = \frac{K}{1+s\tau}$	$\frac{\tau}{K\tau_c}$	$\tau$	0
$G(s) = \frac{Ke^{-\theta} s}{1+s\tau}$	$\frac{\tau}{K(\tau_c + \theta)}$	$\tau$	0
$G(s) = \frac{K}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{K\tau_c}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 * \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$
$G(s) = \frac{Ke^{-\theta} s}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{K(\tau_c + \theta)}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 * \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$

#### 2.4.6. Outros Métodos de Projeto PID

Embora com aplicação industrial menos freqüente, existe uma enorme quantidade de técnicas de projeto PID sugeridas na literatura. A seguir, apresenta-se uma parte desse panorama.

Em seu artigo, Hemerly (1991) propõe uma técnica do projeto de controladores PID digitais. Essa técnica envolve a otimização numérica do desvio da saída do processo em relação à saída de um modelo de referência.

Na classe dos métodos de sintonia analíticos, as técnicas apresentadas em grande parte dos artigos são fundamentadas na representação de estados e na teoria de controle ótimo. Em seu artigo, Athans (1971) mostra como usar a teoria de controle ótimo linear de sistemas reguladores para resolver um problema servo aplicado a uma planta de primeira ordem, resultando numa estrutura de controlador do tipo PI. Essa planta deve ser aumentada por um integrador, para que o sistema de malha fechada consiga acompanhar sinais de referência do tipo degrau aplicado na entrada. Uma solução explícita é fornecida para resolver o problema com um funcional quadrático que envolve uma ponderação entre o sinal do erro e a variável manipulada. Uma restrição do procedimento proposto em Athans (1971) é ser aplicável somente aos sistemas do tipo única entrada e única saída (SISO) e a sistemas de 1<sup>a</sup> ordem ou predominantes.

Esse problema foi resolvido, em parte, por Mukhopadhyaya (1978) que mostra ser possível determinar uma estrutura de controlador do tipo PID multivariável, equivalente à lei de controle do tipo realimentação de estado. O problema com esse método é que a equivalência só é biunívoca quando o número de saída da planta é igual à metade do número de estados. Isso é um tanto restritivo, porém são propostas soluções aproximadas baseadas em problemas de mínimos quadrados. Outra limitação do método proposto em Mukhopadhyaya (1978) é que aspectos de robustez não são tratados.

O problema de robustez foi incorporado por Leonardi e Cruz (1993) e uma aplicação SISO foi apresentada em Maya e Leonardi (1994). Antes do seu mapeamento numa estrutura PID, a lei de controle admitida é do tipo realimentação completa de estados, permitindo que qualquer propriedade conferida pela realimentação de estados, tal como a minimização da norma  $H_2$  ou  $H_\infty$ , venha a ser também obtida aproximadamente na solução PID.

### 3. MÉTODO DO LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES INCREMENTAL

Este capítulo aborda o método do lugar das raízes, suas regras de construção, destacando a propriedade incremental, um dos principais objetos de estudo deste trabalho. Propõe-se aqui uma estratégia de controle de malha fechada e o seu procedimento de projeto baseado na propriedade incremental do lugar das raízes e na técnica de cancelamento de pólos e zeros. Mostra-se que esse controlador, aqui denominado de LGRI, tem uma estrutura equivalente a um controlador PID de dois graus de liberdade, fazendo com que o acompanhamento do sinal de referência e a rejeição de distúrbios, sejam feitos com dinâmicas distintas.

#### 3.1 Método do Lugar das Raízes

Walter R. Evans (1948), teve sua principal contribuição disseminando o método Evans do lugar das raízes e, após dois anos, em 1950, apresentou o método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR), que permite determinar os pólos da função de transferência em malha-fechada, a partir dos pólos e zeros da função de transferência de malha aberta, em função do ganho do sistema (EVANS, 1950). O LGR tornou-se uma ferramenta auxiliar ao desenvolvimento de projeto de sistemas de controle.

Com o método do lugar das raízes, é possível saber como os pólos e zeros em malha aberta devem ser modificados, para que a resposta atenda a certas especificações de desempenho de um sistema. Mas esse é apenas um, entre muitos outros, dos recursos oferecidos na aplicação do método.

Para apresentação dos fundamentos do LGR, considere o diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada, representado na figura 3.1.

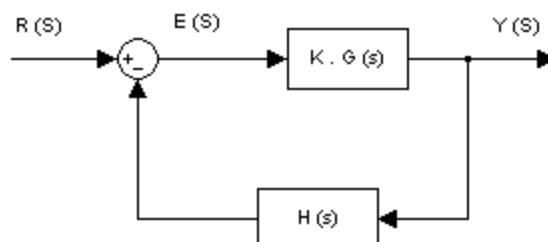


FIGURA 3.1 – SISTEMA DE CONTROLE DE MALHA FECHADA

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}. \quad (3.1)$$

A partir dela, é imediato perceber que a equação

$$1 + K \cdot G(s)H(s) = 0, \quad (3.2)$$

permite determinar os pólos de malha fechada, pois o numerador da função  $1 + K \cdot G(s)H(s)$  é também denominador da função de transferência de malha fechada.

A equação 3.2 se desdobra nas equações 3.3 e 3.4 que definem a condição de módulo, e de fase, respectivamente, bases para a construção do LGR, pois os valores de  $s$  que satisfazem as condições de módulo e fase são as raízes da equação característica (equação 3.2) (OGATA 1997).

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} \quad (3.3)$$

$$\underline{|G(s)H(s)|} = 180^\circ \pm 360^\circ K \quad \text{para} \quad K = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

### 3.1.1. Resumo das Regras de Construção do LGR

O lugar das raízes é uma representação gráfica das localizações dos pólos da função de transferência de malha fechada de um sistema de controle, em função de algum parâmetro da função de transferência de malha aberta. A localização dos pólos de malha fechada está atrelada às especificações do sistema, como por exemplo, porcentagem de sobressinal, tempo de pico, tempo de acomodação, etc.

As principais regras obtidas a partir das condições de módulo e fase, são (NISE, 2002):

- O número de ramos do LGR é igual ao número de pólos de malha aberta (MA).
- O LGR é simétrico em relação ao eixo real.
- No eixo real, para  $K > 0$ , o LGR existe à esquerda de um número ímpar de pólos e/ou zeros de malha aberta sobre o eixo real.

- LGR se inicia com  $K = 0$  nos pólos de malha aberta e termina com  $K \rightarrow \infty$  nos zeros de malha aberta. Quando  $G(s)H(s)$  tem número  $m$  de zeros menor que o número  $n$  de pólos, então  $n-m$  ramos do LGR vão para o infinito quando  $K \rightarrow \infty$ .
- Os ramos do LGR que vão para o infinito, fazem segundo assíntotas que são semi-retas de origem sobre o eixo real na posição

$$\sigma_a = \frac{\Sigma(\text{pólos MA}) - \Sigma(\text{zeros MA})}{n - m} \quad (3.5)$$

e com um ângulo

$$\theta_a(K) = \frac{(2K+1)180^\circ}{n - m}, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (3.6)$$

em relação à horizontal.

- Os pontos de saída e de chegada ao eixo real do LGR ocorrem quando o ganho é, respectivamente, máximo local e mínimo local.
- O ângulo de partida de pólos e de chegada em zeros é determinado pela condição de fase em um ponto do LGR próximo desse polo ou zero.

### 3.2. Propriedade Incremental do Método do Lugar das Raízes

A propriedade incremental do LGR é útil em várias análises. Em seu artigo, Monteiro e Cruz (2008) apresentam uma discussão sobre o LGR utilizando a propriedade incremental a partir de exemplos diversos para responder questões sobre formas incomuns do gráfico de Evans do lugar das raízes.

Em seu artigo Gomes, Leonardi e Cruz (2006) propõem a aplicação da propriedade incremental do LGR no projeto de controladores PID, que é o objetivo deste trabalho.

Para apresentar a propriedade incremental, considere o diagrama de blocos da figura 3.2, em que  $G(s)H(s)$  representa a função de transferência da malha aberta e  $\Delta K$ , um incremento do ganho  $K$ . Note-se que para a determinação das raízes de  $1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$  e, portanto, o traçado do LGR, não é necessário considerar a entrada de referência.

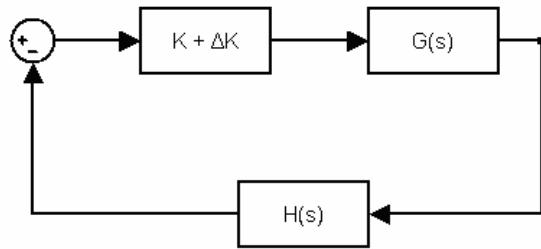


FIGURA 3.2 – ANÁLISE DO LGR INCREMENTAL.

O diagrama de blocos da figura 3.2 é equivalente ao diagrama de blocos da figura 3.3, sendo este mais adequado para se evidenciar a propriedade incremental.

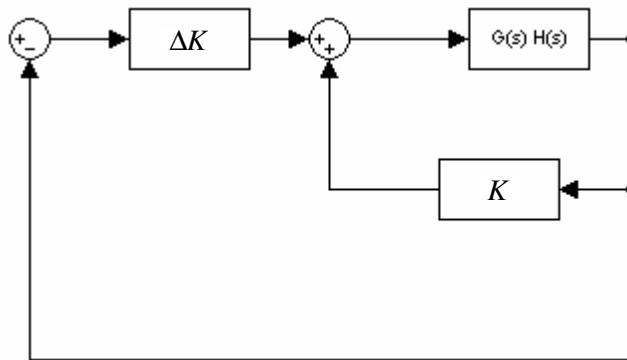


FIGURA 3.3 – DIAGRAMA EQUIVALENTE AO DO LGRI.

A equação característica da malha interna é dada por  $1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$ . Logo, o seu LGR pode ser determinado normalmente em função de  $K$ . Os pólos de malha fechada dessa malha interna, para um dado  $K$ , com seus zeros de malha aberta, determinam a função de transferência (de malha aberta) para a construção do LGR da malha externa em função de  $\Delta K$ . Assim, o ganho  $\Delta K$  aloca os pólos de malha fechada, da malha externa, em uma determinada posição do plano complexo que também é lugar das raízes da malha interna.

Como ilustração considere a função de transferência

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}. \quad (3.7)$$

A figura 3.4 mostra a localização dos pólos em malha aberta nas posições  $-3$  e  $-7$  e o traçado do LGR em função do ganho  $K$  (linha contínua).

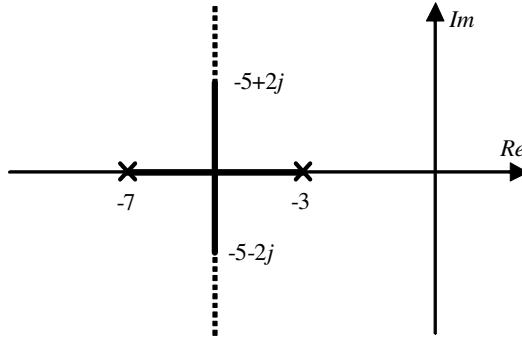


FIGURA 3.4 – LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES EM FUNÇÃO DO GANHO  $K$ .

Ajustando-se, por exemplo, o ganho para  $K = 8$ , os pólos de malha fechada se localizam na posição  $-5 \pm 2j$ . A figura 3.5 ilustra o novo LGR, cujos pólos de malha aberta são  $-5 \pm 2j$ . Note que o LGR em função  $\Delta K$  é a continuação do LGR em função de  $K$ , para  $K > 8$ .

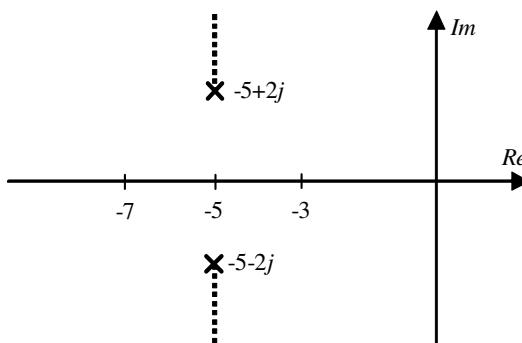


FIGURA 3.5 – LUGAR DAS RAÍZES EM FUNÇÃO DE  $\Delta K$ .

### 3.3 O Projeto de Controladores PID Baseado no LGRI

Os requisitos impostos aos sistemas de controle são denominados de especificações de desempenho e devem ser estabelecidas antes de se iniciar um projeto (OGATA, 2003). Essas especificações podem ser dadas em função da resposta transitória como, por exemplo, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação. As especificações também podem ser em relação ao regime estacionário, como a eliminação dos erros estáticos.

O método heurístico de projeto de controladores PID, baseado na propriedade incremental do LGR, é conduzido em duas etapas.

Deve-se realizar um ensaio preliminar em malha fechada com um controlador proporcional, cujo ganho é aqui denominado  $K_{pre}$ , colocando-se um sinal de entrada do tipo

degrau. Note-se que é necessário que a planta seja estabilizável com um controlador proporcional para que o método possa ser aplicado.

A escolha de valor do ganho  $K_{pre}$  é arbitrária no sentido de que tanto respostas superamortecidas como subamortecidas são válidas para o método. Entretanto, como será detalhado adiante, a dinâmica de rejeição de distúrbios é função desse ganho. Assim, para uma rejeição mais rápida dos distúrbios, recomenda-se que o ganho  $K_{pre}$  seja escolhido de forma a conferir uma resposta do tipo subamortecida.

A partir de informações coletadas do gráfico da resposta, pode-se estimar um modelo aproximado da planta. O próximo passo é projetar um controlador por cancelamento de pólos e zeros. É aqui que se faz a relação com a propriedade incremental do LGR, pois os zeros do controlador são alocados sobre os pólos de malha fechada do ensaio preliminar. Por causa da propriedade incremental, não é necessário se conhecer os pólos e zeros da Planta propriamente dita, já que para um dado  $K_{pre}$ , os pólos de malha fechada podem ser considerados como os pólos de malha aberta para uma nova realimentação.

Além do cancelamento dos pólos pelos zeros do controlador, acrescenta-se um pólo na origem para conferir boas propriedades no regime estacionário da resposta. O ganho  $K_{locus}$  do compensador ajusta a velocidade de resposta do sistema.

### 3.3.1. Ensaio Preliminar

O ensaio preliminar serve para se determinar a posição dos pólos dominantes do sistema em malha fechada. Como o LGR é incremental, não se faz necessário saber onde estão os pólos de malha aberta. Esse é o ponto-chave da técnica proposta neste trabalho.

O ensaio preliminar é conduzido com um controlador proporcional e um sinal tipo degrau aplicado na entrada de referência. A figura 3.6 mostra a estrutura usada no ensaio preliminar.

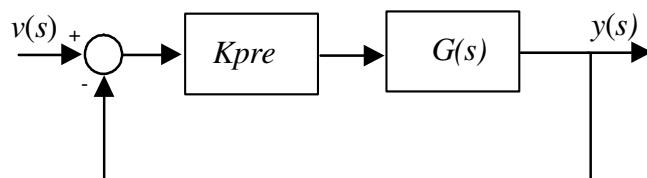


FIGURA 3.6 – ENSAIO PRELIMINAR.

No diagrama de blocos do ensaio preliminar, identifica-se a planta  $G(s)$  e ganho  $K_{pre}$  do controlador proporcional. Para que o procedimento de projeto possa ser aplicado, o sistema da figura 3.6 deve ser estabilizável. Dependendo da resposta obtida com o valor escolhido de  $K_{pre}$ , aplica-se um dos procedimentos descritos nas seções seguintes.

### 3.3.1.1. Sistemas Subamortecidos

Após realizar o ensaio preliminar, se a resposta do sistema resultar sub-amortecida, deve-se obter a função de transferência aproximada para a malha fechada

$$F(s) = \frac{Y(s)}{V(s)}. \quad (3.9)$$

Um procedimento recomendado para tanto é, a partir dos dados do ensaio preliminar,

- determinar o valor do instante de pico  $T_p$ ;
- determinar a porcentagem de ultrapassagem (sobressinal)  $\%UP$ ;
- calcular o ganho de baixas frequências  $K_g$  do sistema em malha fechada;
- calcular a posição  $-\sigma_d \pm j\omega_d$  dos pólos dominantes do sistema em malha fechada.

A equação 3.10 apresenta a função de transferência associada a esses valores.

$$F(s) = K_g \frac{(\sigma_d^2 + \omega_d^2)}{(s + \sigma_d + j\omega_d)(s + \sigma_d - j\omega_d)}. \quad (3.10)$$

As fórmulas que relacionam os valores notáveis da curva de resposta com a posição dos pólos dominantes de segunda ordem, segundo Ogata (1997), são aquelas apresentadas nas equações 3.11 e 3.12.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.11)$$

$$\%UP = 100 e^{-\pi \left( \frac{\sigma_d}{\omega_d} \right)} \quad . \quad (3.12)$$

O ganho  $Kg$  pode ser determinado a partir da variação  $\Delta v$  aplicada ao sinal de referência e da variação  $\Delta y$  obtida no sinal de saída  $y(t)$ .

### 3.3.1.2. Sistemas Superamortecidos

Se o sinal de saída no ensaio preliminar resultar superamortecido, pode-se determinar posição  $-\sigma_d$  do pólo real dominante por meio da constante de tempo observada na resposta. O ganho  $Kg$  do sistema pode ser determinado a partir da variação  $\Delta v$  aplicada ao sinal de referência e da variação  $\Delta y$  obtida no sinal de saída  $y(t)$ .

A função de transferência de malha fechada associada a esses valores é dada por

$$F(s) = Kg \cdot \frac{1/\tau}{(s + 1/\tau)} \quad . \quad (3.13)$$

Para se caracterizar um sistema de primeira ordem, pode-se usar a expressão temporal da resposta ao degrau

$$y(t) = \Delta v \cdot Kg \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad t \geq 0, \quad (3.14)$$

Para se verificar experimentalmente se o sistema apresenta resposta superamortecida e com um pólo real dominante, pode-se aplicar o seguinte procedimento prático: (i) registrar o instante de tempo  $t = t_1$  para o qual a saída é 63% do valor final; (ii) verificar se para 86% do valor final, o valor do tempo  $t = t_2$  é aproximadamente  $2t_1$ , e (iii) verificar se para 95% do valor final, o valor do tempo  $t = t_3$  é aproximadamente  $3t_1$ . Se essas condições forem satisfeitas, o sistema pode ser considerado superamortecido e com um pólo real dominante.

### 3.3.1.3. Sistemas com Amortecimento Crítico

Se o sinal de saída no ensaio preliminar resultar criticamente amortecido, pode-se determinar posição  $-\sigma_d$  dos pólos duplos reais e dominante por meio da constante de tempo observada na resposta. O ganho  $Kg$  do sistema pode ser determinado a partir da variação  $\Delta v$  aplicada ao sinal de referência e da variação  $\Delta y$  obtida no sinal de saída  $y(t)$ .

$$F(s) = Kg \frac{(1/\tau)^2}{(s+1/\tau)^2}. \quad (3.15)$$

Para se caracterizar um sistema com amortecimento crítico, pode-se usar a expressão no tempo da resposta ao degrau

$$y(t) = \Delta v \cdot Kg \left( 1 - e^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau} t e^{-t/\tau} \right) \quad t \geq 0. \quad (3.16)$$

Para se verificar experimentalmente se o sistema apresenta resposta criticamente amortecida pode-se aplicar um procedimento prático, comparando a resposta ao degrau com alguns valores notáveis da equação 3.16. A tabela 3.1 apresenta alguns valores para esse teste. Por exemplo, quando a saída é 26% do valor final, obtém-se  $t_1$ . Se para 60% do valor final  $t_2 \cong 2t_1$ , para 80% do valor final  $t_3 \cong 3t_1$  e para 90% do valor final  $t_4 \cong 4t_1$ , então o sistema é aproximadamente criticamente amortecido.

TABELA 3.2 – RESPOSTA DO SISTEMA COM AMORTECIMENTO CRÍTICO

y(t)	
$t = t_1 = \tau$	$\approx 0,26 y(\infty)$
$t_2 = 2 t_1$	$\approx 0,60 y(\infty)$
$t_3 = 3 t_1$	$\approx 0,80 y(\infty)$
$t_4 = 4 t_1$	$\approx 0,90 y(\infty)$

### 3.3.2. Cancelamento de Pólos e Zeros

A técnica de cancelamento de pólos e zeros é usada aqui para cancelar os pólos dominantes da malha fechada do ensaio preliminar com os zeros do controlador LGRI. Além dos dois zeros, o controlador proposto possui ainda um pôlo na origem e um ganho denominado *Klocus*. A figura 3.7 apresenta a estrutura completa do sistema de controle proposto.

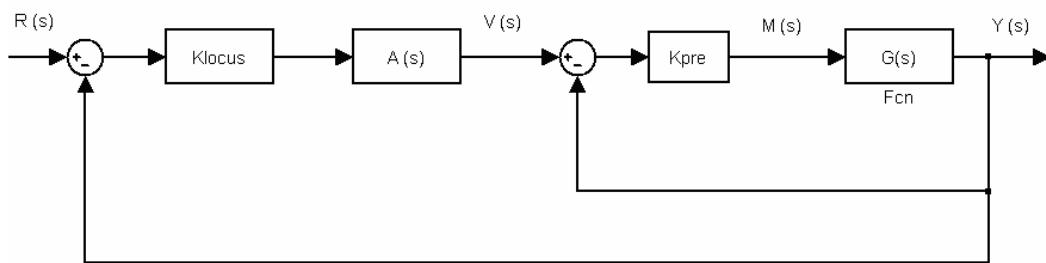


FIGURA 3.7 – SISTEMA DE CONTROLE PROPOSTO.

O ganho *Klocus* é responsável pelo ajuste da velocidade de resposta em malha fechada, pois seu valor afeta diretamente a constante de tempo de malha fechada, como será detalhado adiante.

A técnica de cancelamento de pólos pode ser aplicada a qualquer um dos três tipos de sistemas analisados: subamortecido, superamortecido e criticamente amortecido. No caso de sistema subamortecido, o cancelamento é realizado por meio da função

$$A(s) = \frac{(s+\sigma_d+j\omega_d)(s+\sigma_d-j\omega_d)}{s}. \quad (3.17)$$

No caso de sistema superamortecido, o controlador cancela o pôlo dominante com

$$A(s) = \frac{(s+1/\tau)}{s}, \quad (3.18)$$

enquanto que, se o sistema resulta criticamente amortecido, o controlador cancela os dois pólos dominantes por meio da função.

$$A(s) = \frac{(s+1/\tau).(s+1/\tau)}{s} \quad (3.19)$$

Na seção seguinte, mostra-se que o controlador da figura 3.7 é equivalente a um PID com dois graus de liberdade, nos casos das equações 3.17 e 3.19. Para o caso da equação 3.18, o compensador é equivalente a um controlador PI.

### 3.4 O Controlador PID de Dois Graus de Liberdade (TDOF)

Na área dos sistemas de controle de processos, sabe-se que os esquemas básicos de PID e PID modificados provaram sua utilidade conferindo um controle satisfatório, embora em muitas situações eles não permitam elevados desempenhos. Como a maioria dos controladores PID é ajustada em campo, diferentes tipos de regras de sintonia vêm sendo propostas na literatura. Com a utilização das regras, ajustes finos nos controladores podem ser realizados em campo. Estruturas PID modificadas, como o modelo I-PD e o controlador de dois graus de liberdade, estão em uso na indústria. A utilidade de controladores PID está na sua aplicabilidade geral à maioria dos sistemas de controle. Em particular, quando o modelo da planta é desconhecido, métodos de projeto analítico não podem ser utilizados. Em casos práticos, pode existir um requisito relativo à resposta da entrada de distúrbio e outro requisito relativo à resposta da entrada de referência, conflitantes entre si. Logo não podem ser satisfeitos no caso de um grau de liberdade. Aumentando os graus de liberdade, somos capazes de atender a mais de um requisito. Nesses esquemas de controle temos um controlador no ramo direto e outro controlador no ramo de realimentação (OGATA, 2003).

#### 3.4.1. Estrutura do Controlador TDOF

O controlador LGRI (figura 3.7), com a função de transferência  $A(s)$  dada por umas das equações de 3.17 a 3.19, é equivalente a estrutura de controle de dois graus de liberdade com controladores PID mostrada na figura 3.10. Uma vez que o problema de rejeição de distúrbios é questão fundamental no problema com dois graus de liberdade, a perturbação  $D(s)$  foi explicitada nesse diagrama.

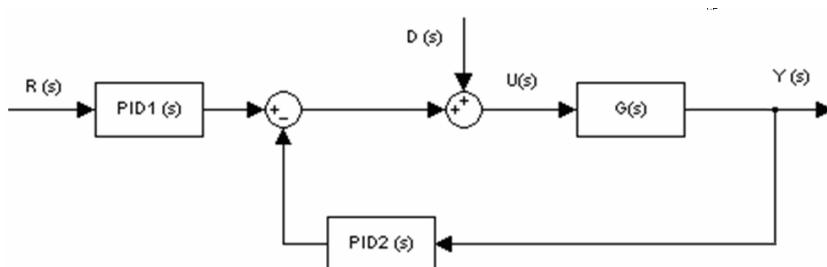


FIGURA 3.8 – ESTRUTURA TDOF COM CONTROLADORES PID

A função de transferência dos controladores PID é dada por

$$PID1(s) = \frac{Kd_1 s^2 + Kp_1 s + Ki_1}{s} \quad (3.20)$$

e

$$PID2(s) = \frac{Kd_2 s^2 + Kp_2 s + Ki_2}{s}. \quad (3.21)$$

### 3.4.2. Lei de Controle do Controlador TDOF

Embora a lei de controle de dois graus de liberdade possa ser facilmente obtida para qualquer um dos casos das equações de 3.17 a 3.19, por ser considerado o mais relevante, somente o caso subamortecido foi detalhado nesta seção e nas seguintes.

Para essa condição, a lei de controle de dois graus de liberdade resulta

$$u(s) = K_{pre.Klocus} \left[ \frac{s^2 + 2\sigma_d s + (\sigma_d^2 + \omega_d^2)}{s} \right] r(s) - \\ K_{pre.Klocus} \left[ \frac{s^2 + (2\sigma_d + 1/K_{locus})s + (\sigma_d^2 + \omega_d^2)}{s} \right] y(s), \quad (3.22)$$

ou seja, com os ganhos dos controladores  $PID1(s)$  e  $PID2(s)$  dados pelos valores da tabela 3.2.

TABELA 3.2 – SINTONIA PID

	PID1	PID2
$K_p$	$K_{pre.Klocus}(2\sigma_d)$	$K_{pre.Klocus}(2\sigma_d + 1/k_{locus})$
$K_i$	$K_{pre.Klocus}(\sigma_d^2 + \omega_d^2)$	$K_{pre.Klocus}(\sigma_d^2 + \omega_d^2)$
$K_d$	$K_{pre.Klocus}$	$K_{pre.Klocus}$

### 3.4.3. PID Real

Para limitar o ganho elevado das altas freqüências causado pela ação derivativa, é comum adicionar-se um filtro de primeira ordem na parcela derivativa da lei de controle PID (equação 3.23). O controlador PID com essa filtragem é comumente denominado de PID-Real.

$$PID_R(s) = K_p + \frac{Ki}{s} + \frac{s}{fs+1} \cdot K_d \quad (3.23)$$

Se o controle com dois graus de liberdade for implementado com controladores PID-Reais, a função de transferência  $A(s)$  deve incorporar esse polo da seguinte forma, ou seja,

$$A(s) = \frac{(s+\sigma_d+j\omega_d)(s+\sigma_d-j\omega_d)}{s(fs+1)}, \quad (3.24)$$

e a lei de controle resulta

$$\begin{aligned} u(s) &= K_{pre.Klocus} \left[ \frac{s^2 + 2\sigma_d s + (\sigma_d^2 + \omega_d^2)}{s(fs+1)} \right] r(s) - \\ &\quad K_{pre.Klocus} \left[ \frac{s^2 + (2\sigma_d + 1/Klocus)s + (\sigma_d^2 + \omega_d^2)}{s(fs+1)} \right] y(s), \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.4.4. Dinâmica da rejeição ao distúrbio

A estrutura de controlador de dois graus de liberdade da figura 3.8 também é equivalente ao diagrama de blocos da figura 3.9, em que  $F_1(s)$  é a função de transferência do  $PID_1$  e  $F_2(s)$ , do  $PID_2$ .

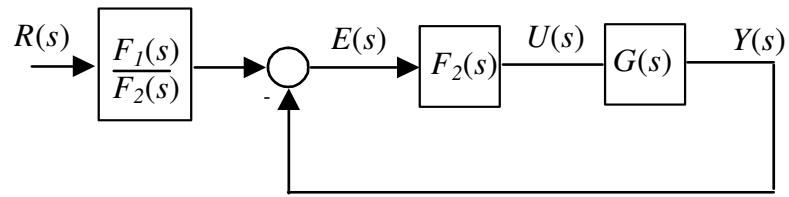


FIGURA 3.9 – CONTROLE COM PRÉ FILTRO.

Devido ao cancelamento de pólos proposto no projeto, a função de transferência de malha fechada resulta em um sistema de primeira ordem

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad (3.26)$$

sendo que a constante de tempo é dada por

$$\tau = \frac{1}{K_{locus} \cdot Kg (\sigma_d^2 + \omega_d^2)}, \quad (3.27)$$

Como o valor do ganho  $K_{locus}$  é arbitrário, a velocidade de resposta da saída também é arbitrária. Entretanto, a função de transferência de malha fechada, sem o pré-filtro  $F_1(s)/F_2(s)$ , resulta em uma dinâmica mais complexa, conforme equação 3.27.

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \left( \frac{k_{d2}s^2 + k_{p2}s + k_{i2}}{k_{d1}s^2 + k_{p1}s + k_{i1}} \right) \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (3.27)$$

Como a compensação da perturbação  $D(s)$  que se soma a  $U(s)$ , é feita por essa mesma malha, esse processo de rejeição será realizado com a dinâmica de 3ª ordem

$$T_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \left( \frac{s}{k_{d1}s^2 + k_{p1}s + k_{i1}} \right) \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (3.28)$$

A equação 3.29 mostra que a rejeição às perturbações possui uma dinâmica igual à do acompanhamento do sinal de referência e outra igual à dinâmica da malha usada no ensaio preliminar.

$$T_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{K_{locus} K_{pre}} \left( \frac{s}{s^2 + 2\sigma_d s + (\sigma_d^2 + \omega_d^2)} \right) \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (3.29)$$

Admitindo-se que a dinâmica de primeira ordem escolhida seja suficientemente rápida, a dinâmica preponderante de  $T_D(s)$  será a de segunda ordem. Nesse cenário, se o objetivo for rejeição rápida, mais rápida deve ser a resposta utilizada no ensaio preliminar, o que tipicamente significa maiores valores de  $K_{pre}$ .

Conclui-se que o controlador que está associado ao acompanhamento do sinal de referência conduz a desempenhos próximos do comportamento de sistemas de primeira ordem, enquanto o outro controlador, que está associado à rejeição de distúrbio, tem dinâmica mais complexa.

## 4. ANÁLISE DE DESEMPENHO

Neste capítulo analisa-se o compensador LGRI no controle de uma série de modelos de plantas que são comuns nas aplicações práticas da área de controle de processos. Seu desempenho é comparado com o de controladores PID, sintonizados por técnicas clássicas. A comparação é feita por meio das características notáveis da resposta transitória do sinal de saída e do sinal de controle.

### 4.1. Desempenho via Simulação

O esquema da figura 4.1 ilustra o compensador LGRI aplicado ao controle de nível de um tanque. Nesta seção serão realizadas simulações de sistemas de controle com a mesma estrutura daquele da figura 4.1, porém com outras plantas comuns nos processos produtivos, a exemplo dos trocadores de calor, sistemas térmicos, caldeiras, etc.

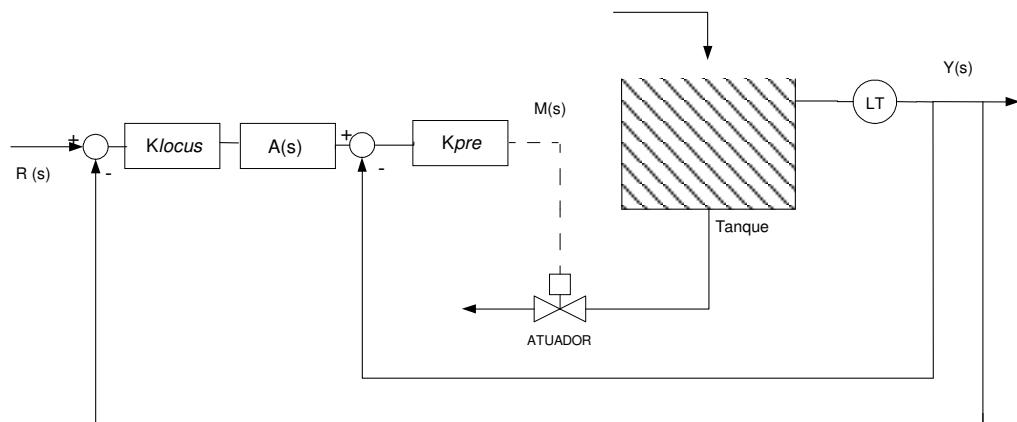


FIGURA 4.1 – ESTRUTURA DO SISTEMA DE CONTROLE.

#### 4.1.1. Sistema Marginalmente Estável

Considere a função

$$G(s) = \frac{100}{s(s+10)(s+50)}. \quad (4.1)$$

Essa  $G(s)$  é uma função marginalmente estável e poderia, por exemplo, representar um servomecanismo cuja saída é a posição e os valores -10 e -50, os pólos mecânico e elétrico, respectivamente. Também poderíamos imaginar que esta função de transferência é

um modelo de um vaso de pressão, onde os pólos fora da origem estariam, por exemplo, associados à dinâmica do atuador.

Dentre os métodos clássicos de sintonia de controladores PID apresentados na revisão bibliográfica deste trabalho, a maioria deles não pode ser aplicada a este caso, pois a planta não é estável. Uma vez que o LGR associado, intercepta o eixo imaginário, o segundo método de Ziegler e Nichols pode ser aplicado. Também é possível aplicar o método do relê, pois seu diagrama de Nyquist intercepta o eixo real negativo<sup>1</sup>. Note que, se um dos pólos que está fora da origem não existisse, o diagrama de Nyquist interceptaria do eixo real negativo somente na origem e a amplitude das oscilações auto-sustentadas seria nula. Por questões meramente didáticas, optou-se por realizar as comparações de desempenho do controlador LGRI com o PID sintonizado pelo método do relê.

Uma vez que o método LGRI e o do relê têm objetivos diferentes, é necessário estabelecer uma base para as comparações. Decidiu-se então impor um mesmo esforço de controle para que as características da resposta transitória pudessem ser confrontadas.

#### **4.1.1.1. Projeto PID pelo Método do Relê.**

Para um valor de saturação  $h = 10$ , escolhido arbitrariamente, as oscilações do ciclo limite exibem uma amplitude  $a = 0,089$  e um período  $P_{cr} = 0,29\text{s}$ . Com esses valores, obtêm-se os ganhos sugeridos por Ziegler e Nichols e a função de transferência PID resulta

$$C(s) = 85,64 \left( 1 + \frac{1}{0,145 s} + 0,036 s \right). \quad (4.2)$$

#### **4.1.1.2. Projeto LRGI.**

O controlador LGRI possui dois parâmetros de projeto,  $K_{pre}$  e  $K_{locus}$ . O primeiro deles é usado durante o ensaio preliminar e também influencia a dinâmica de rejeição de perturbações. O segundo parâmetro influencia a constante de tempo de acompanhamento do sinal de referência.

O valor  $K_{pre} = 100$  foi escolhido por meio de tentativas de modo a se obter uma resposta do tipo sub-amortecida no ensaio preliminar. A figura 4.2 apresenta o gráfico do

---

<sup>1</sup> Condição para existência de um ciclo limite.

sinal de saída  $y(t)$  para um sinal de referência  $v(t)$  do tipo degrau de amplitude unitária. Do gráfico de  $y(t)$ , obtém-se o instante de pico  $T_p = 0,253\text{ s}$  e o sobressinal  $M_p = 48,75\%$ . O ganho de regime permanente  $K_g = 1$  é determinado dividindo-se o valor de regime de saída pela amplitude do degrau de referência aplicado. Com base nessas informações, a função de transferência estimada resulta

$$F(s) = \frac{162,2}{s^2 + 5,68 s + 162,2} . \quad (4.3)$$

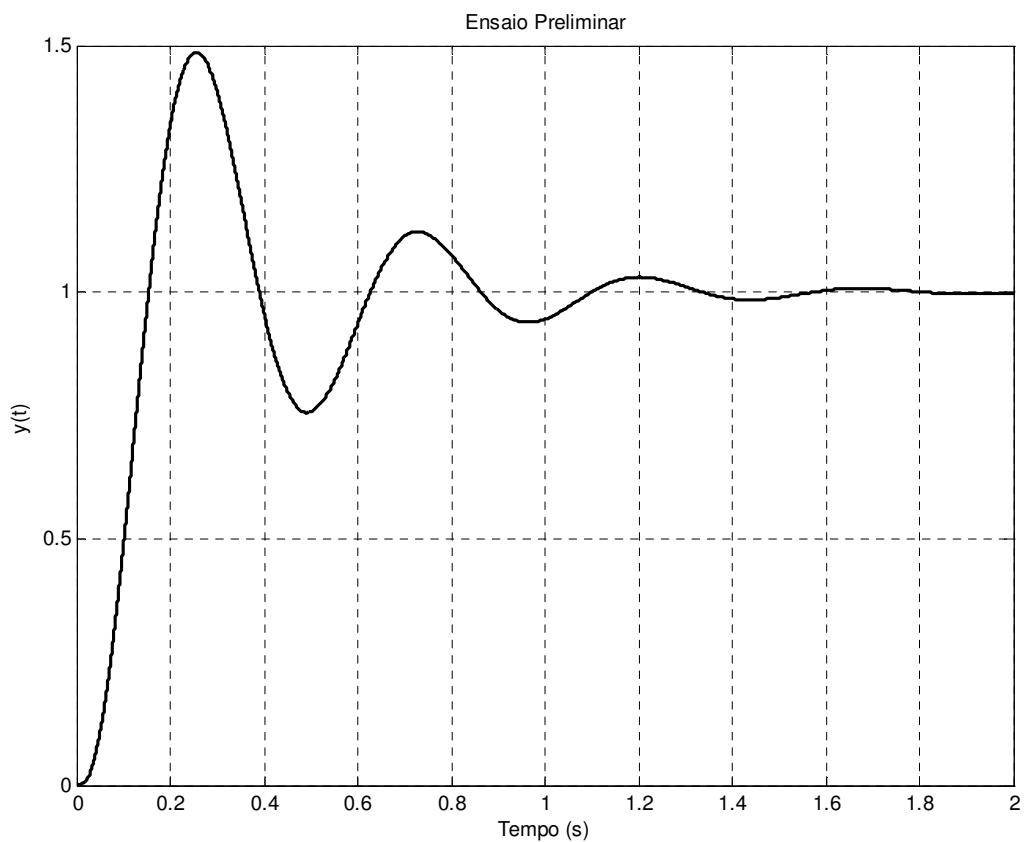


FIGURA 4.2 – ENSAIO PRELIMINAR.

O valor  $K_{locus} = 0,038$  foi escolhido por meio de tentativas de modo que o esforço de controle obtido com o controlador LGRI fosse igual ao esforço de controle obtido com o PID projetado pelo método do relé. Com os valores  $K_{pre}$ ,  $K_{locus}$  e com as informações do ensaio preliminar determinam-se os controladores

$$PID1(s) = \frac{3,8s^2 + 21,58s + 616,45}{s} \quad (4.4)$$

e

$$PID2(s) = \frac{3,8s^2 + 121,58s + 616,45}{s}. \quad (4.5)$$

#### 4.1.1.3. Comparativo

Os gráficos da figura 4.3 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de referência tipo degrau unitário no instante 0,2 s, utilizando-se o controlador LGRI e o controlador PID sintonizado pela técnica do relé. Como impusemos que os valores máximos do controle fossem iguais, as demais características da resposta podem ser comparadas numa mesma base.

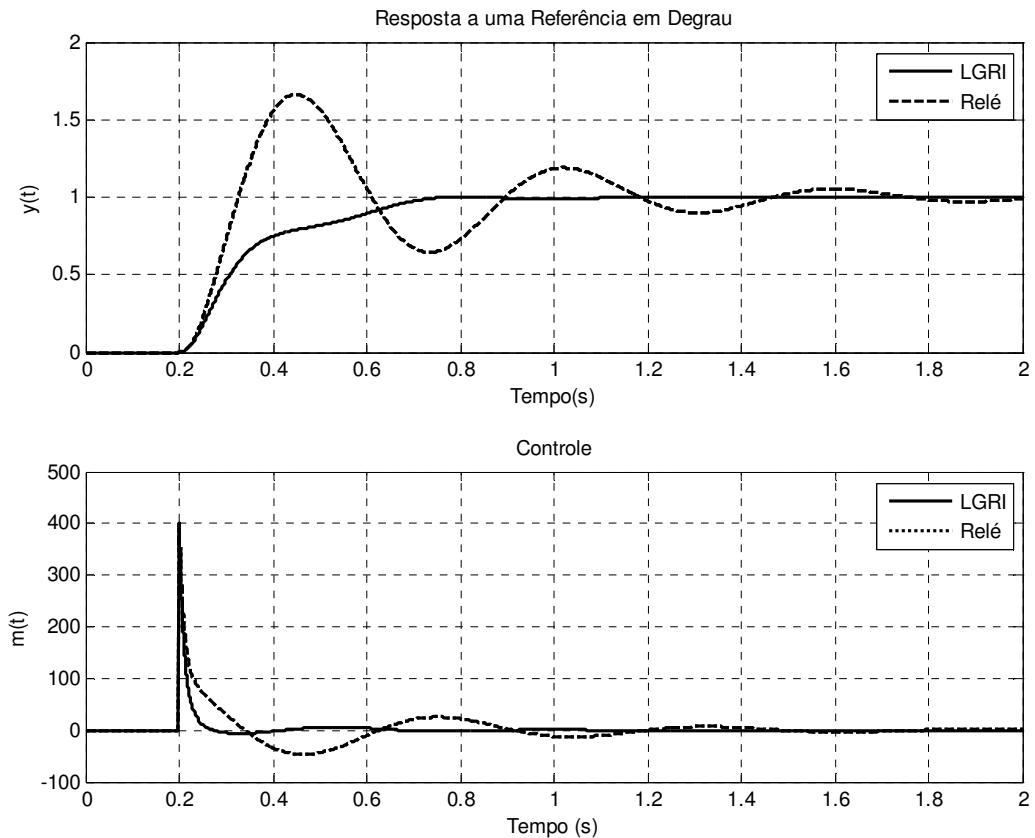


FIGURA 4.3 – RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.

Como esperado, o sinal de resposta da planta com controlador LGRI apresenta uma resposta que pode ser aproximada a de um sistema de primeira ordem, cuja constante de tempo é de, aproximadamente,  $0,16\text{ s}$ .

No caso deste exemplo, a resposta do controlador LGRI é superior em quase todas as características da resposta transitória, ou seja, no sobressinal e no tempo de acomodação. O método do relé foi superior apenas em relação ao tempo de subida.

Os gráficos da figura 4.4 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de perturbação tipo degrau de amplitude 10, aplicado no instante  $0,2\text{ s}$ .

Como o valor de  $K_{pre}$  não foi escolhido de forma a fixar a dinâmica da rejeição de perturbação e sim apenas para conferir uma resposta adequada à coleta de dados do ensaio preliminar, o desempenho da rejeição de perturbação poderia ser bem diferente daquele observado para uma variação do sinal de referência.

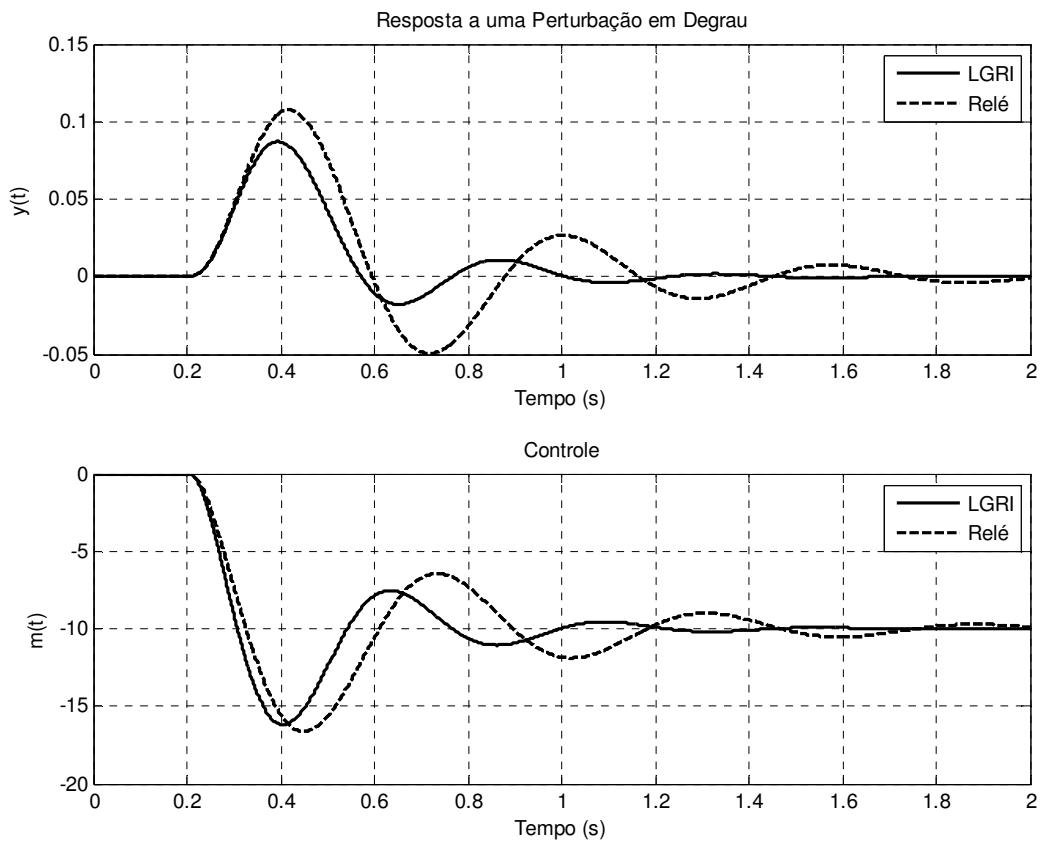


FIGURA 4.4 – RESPOSTA AO DISTURBIO.

Dos gráficos da figura 4.4 pode-se constatar que tanto a máxima excursão da saída como o tempo de restabelecimento do valor de regime, são inferiores quando o sistema é controlado pelo LGRI, além de exibir um menor esforço de controle.

As tabelas 4.1.a e 4.1.b resumem os comparativos. Para uma variação do sinal de referência, comparou-se o esforço de controle ( $m(t)$  máximo), o tempo de acomodação  $Ts$  da resposta  $y(t)$  e seu sobressinal. Na rejeição de perturbações, compararam-se as amplitudes máximas presentes no sinal de controle e na saída, necessárias para rejeitar o distúrbio.

*Tabela 4.1.a – DADOS COLETADOS – REFERÊNCIA.*

	$m(t)$ máximo	$Ts$	Sobressinal (%)
LGRI	400	0,7s	0
Relê	400	2 s	66

*Tabela 4.1.b – DADOS COLETADOS – DISTÚRBIO.*

	$ m(t) $ máximo	$y(t)$ máximo
LGRI	16,2	0,087
Relê	16,6	0,107

#### 4.1.2. Sistema Benchmarking

Em seu artigo sobre sintonia ótima de controladores digitais, Hemerly (1991) apresenta a função de transferência

$$G(s) = \frac{4,23}{s^3 + 2,14s^2 + 9,28s + 4,23} , \quad (4.6)$$

e argumenta que ela representa uma planta de difícil sintonia pelos métodos clássicos. Pelo caráter desafiador, o projeto LGRI é conduzido para esta planta e seu desempenho comparado com o método de Ziegler e Nichols (1942).

##### 4.1.2.1. Projeto PID pelo Segundo Método de Ziegler e Nichols

Ajustando o ganho do controlador proporcional, obtém-se o limiar de estabilidade para  $Kcr = 3,7$ , com um período crítico  $Pcr = 2,05\text{s}$ . Com esses valores, obtêm-se os ganhos sugeridos por Ziegler e Nichols e a função de transferência PID resulta

$$C(s) = 2,2 \left( 1 + \frac{1}{1,028s} + 0,257s \right). \quad (4.7)$$

#### 4.1.2.2. Projeto LRGI

O valor  $K_{pre} = 1,5$  foi escolhido por meio de tentativas de modo a se obter uma resposta do tipo subamortecida no ensaio preliminar e de forma que o primeiro dos picos fosse o maior deles, tal como ocorre para os sistemas de segunda ordem sub-amortecidos. A figura 4.5 apresenta o gráfico do sinal de saída  $y(t)$  para um sinal de referência  $v(t)$  do tipo degrau de amplitude unitária. Do gráfico de  $y(t)$ , obtém-se o instante de pico  $T_p = 1,64\text{ s}$  e o sobressinal  $M_p = 11\%$ . O ganho de regime permanente  $K_g = 0,6$  é determinado dividindo-se o valor de regime de saída pela amplitude do degrau de referência aplicado. Com base nessas informações, a função de transferência estimada resulta

$$F(s) = \frac{3,28}{s^2 + 2,68s + 5,47} . \quad (4.8)$$

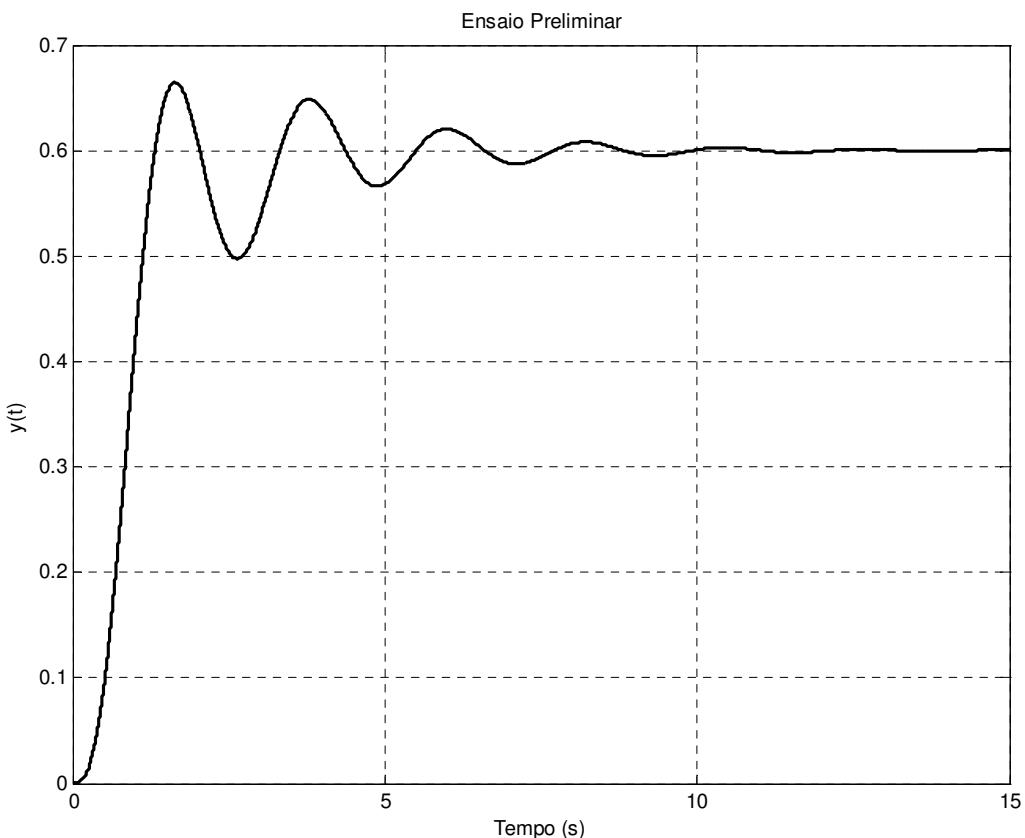


FIGURA 4.5 – ENSAIO PRELIMINAR.

O valor  $K_{locus} = 0,38$  foi escolhido por meio de tentativas de modo que o esforço de controle obtido com o controlador LGRI fosse igual ao esforço de controle obtido com o PID

projeto pelo segundo método de Ziegler e Nichols. Com os valores  $K_{pre}$ ,  $K_{locus}$  e com as informações do ensaio preliminar determinam-se os controladores

$$PID1(s) = \frac{0,57s^2 + 1,53s + 3,12}{s} \quad (4.9)$$

e

$$PID2(s) = \frac{0,57s^2 + 3,03s + 3,12}{s} \quad (4.10)$$

#### 4.1.2.3. Comparativo

Os gráficos da figura 4.6 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de referência tipo degrau unitário no instante 1,0 s, utilizando-se o controlador LGRI e o controlador PID sintonizado pelo método de Ziegler e Nichols.

Como impusemos que os valores máximos do controle fossem iguais, as demais características da resposta podem ser comparadas numa mesma base. No caso deste exemplo, a resposta do controlador LGRI é, de uma maneira geral, inferior à resposta obtida com o controlador PID projetado pelo método de Ziegler e Nichols.

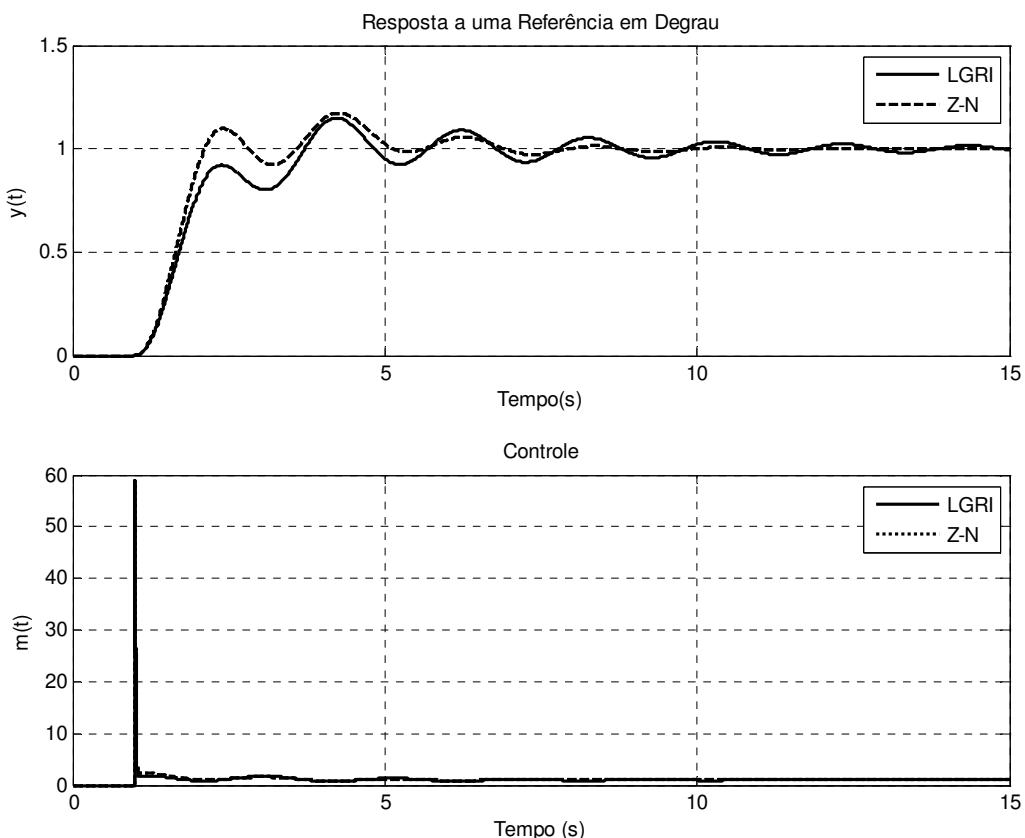


FIGURA 4.6 – RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.

Os gráficos da figura 4.7 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de perturbação tipo degrau de amplitude 10, aplicado no instante 1,0 s.

Dos gráficos pode-se constatar que a máxima excursão da saída é ligeiramente menor com o controlador LGRI. Porém, o esforço de controle necessário para isso é ligeiramente maior que o esforço obtido como o controlador projetado pelo método de Ziegler e Nichols.

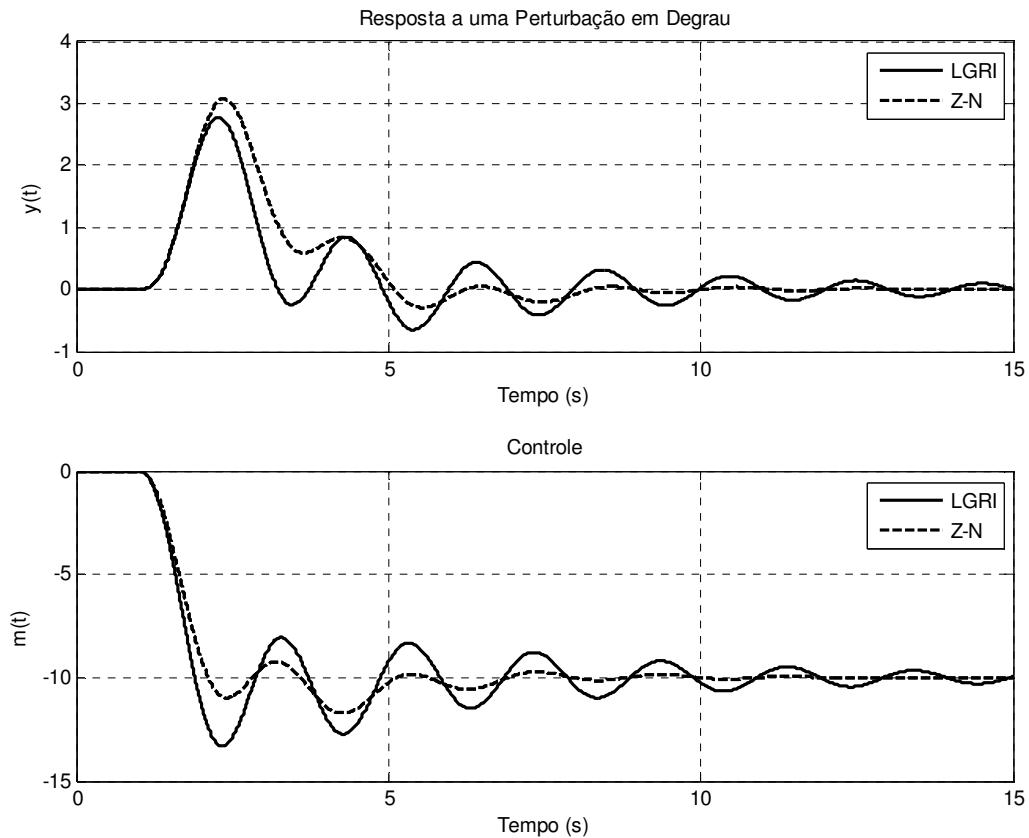


FIGURA 4.7 – RESPOSTA AO DISTÚRIO.

As tabelas 4.2.a e 4.2.b resumem os comparativos. Para uma variação do sinal de referência, comparou-se o esforço de controle ( $m(t)$  máximo), o tempo de acomodação  $T_s$  da resposta  $y(t)$  e seu sobressinal. Na rejeição de perturbações, comparam-se as amplitudes máximas presentes no sinal de controle e na saída, necessárias para rejeitar o distúrbio.

Nota-se que, de uma maneira geral, o controlador LGRI apresenta um desempenho inferior, especialmente com relação ao tempo de acomodação.

*Tabela 4.2.a – DADOS COLETADOS – REFERÊNCIA.*

	$m(t)$ máximo	$T_s$	Sobressinal (%)
LGRI	59	13,5 s	15
Z-N	59	7,6 s	17

*Tabela 4.2.b – DADOS COLETADOS – DISTÚRBIO.*

	$ m(t) $ máximo	$y(t)$ máximo
LGRI	13,3	2,7
Z-N	11,7	3,1

#### 4.1.3. Sistema com Resposta Inversa

De acordo com Stephanopoulos (1984), sistemas com resposta inversa são típicos em vários processos, a exemplo do controle de nível de uma caldeira. Por esse motivo o projeto LGRI é conduzido para a planta

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{0,5s+1}, \quad (4.11)$$

e seu desempenho comparado com o método de Ziegler e Nichols (1942).

##### 4.1.3.1. Projeto PID pelo Segundo Método de Ziegler e Nichols

Ajustando o ganho do controlador proporcional, obtém-se o limiar de estabilidade para  $K_{cr} = 2,0$ , com um período crítico  $P_{cr} = 3,15\text{ s}$ . Com esses valores, obtêm-se os ganhos sugeridos por Ziegler e Nichols e a função de transferência PID resulta

$$C(s) = 1,2 \left( 1 + \frac{1}{1,578s} + 0,395s \right). \quad (4.12)$$

#### 4.1.3.2. Projeto LRGI.

O valor  $K_{pre} = 1,0$  foi escolhido por meio de tentativas de modo a se obter uma resposta do tipo sub-amortecida no ensaio preliminar. A figura 4.8 apresenta o gráfico do sinal de saída  $y(t)$  para um sinal de referência  $v(t)$  do tipo degrau de amplitude unitária. Do gráfico de  $y(t)$ , obtém-se o instante de pico  $T_p = 2,7\text{ s}$  e o sobressinal  $M_p = 36,5\%$ . O ganho de regime permanente  $K_g = 1,0$  é determinado dividindo-se o valor de regime de saída pela amplitude do degrau de referência aplicado. Com base nessas informações, a função de transferência estimada resulta

$$F(s) = \frac{1,48}{s^2 + 0,74 s + 1,48} . \quad (4.13)$$

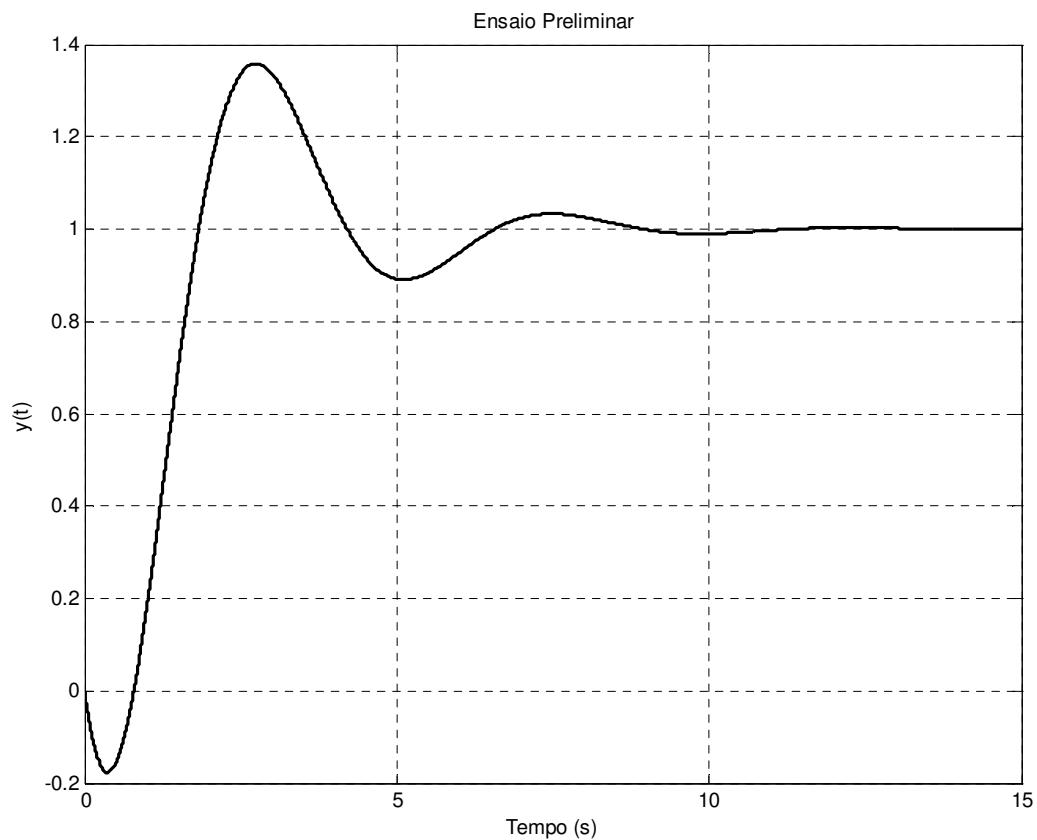


FIGURA 4.8 – ENSAIO PRELIMINAR

O valor  $K_{locus} = 0,48$  foi escolhido por meio de tentativas de modo que o esforço de controle obtido com o controlador LGRI fosse igual ao esforço de controle obtido com o PID projetado pelo método de Ziegler e Nichols. Com os valores  $K_{pre}$ ,  $K_{locus}$  e com as informações do ensaio preliminar determinam-se os controladores

$$PID1(s) = \frac{0,5s^2 + 0,37s + 0,74}{s} \quad (4.14)$$

e

$$PID2(s) = \frac{0,5s^2 + 1,37s + 0,74}{s} \quad (4.15)$$

#### 4.1.3.3. Comparativo

Os gráficos da figura 4.9 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de referência tipo degrau unitário no instante 1,0 s, utilizando-se o controlador LGRI e o controlador PID sintonizado pelo método de Ziegler e Nichols.

Como impusemos que os valores máximos do controle fossem iguais, as demais características da resposta podem ser comparadas numa mesma base. Observando o tempo de acomodação e o sobressinal da resposta, conclui-se que o controlador LGRI conferiu um desempenho superior no acompanhamento do sinal de referência.

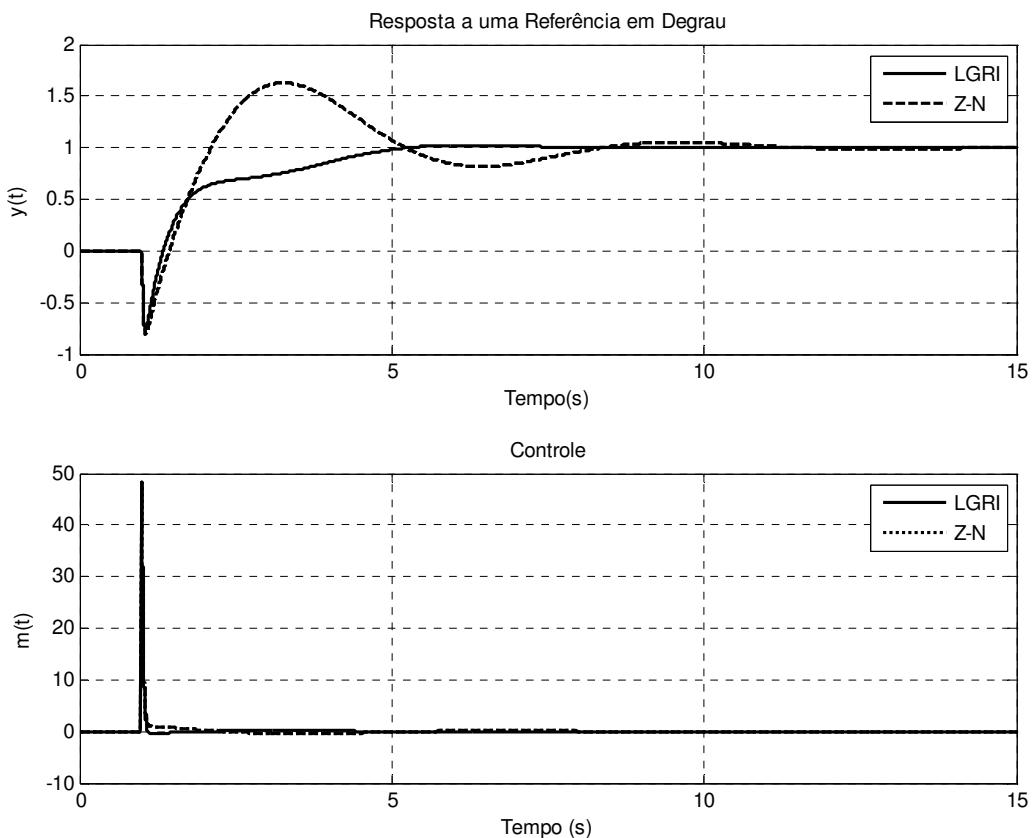


FIGURA 4.9 – RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.

Os gráficos da figura 4.10 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de perturbação tipo degrau de amplitude 10, aplicado no instante 1,0 s.

Dos gráficos pode-se constatar que a máxima excursão da saída e o esforço de controle necessário são, praticamente, os mesmos.

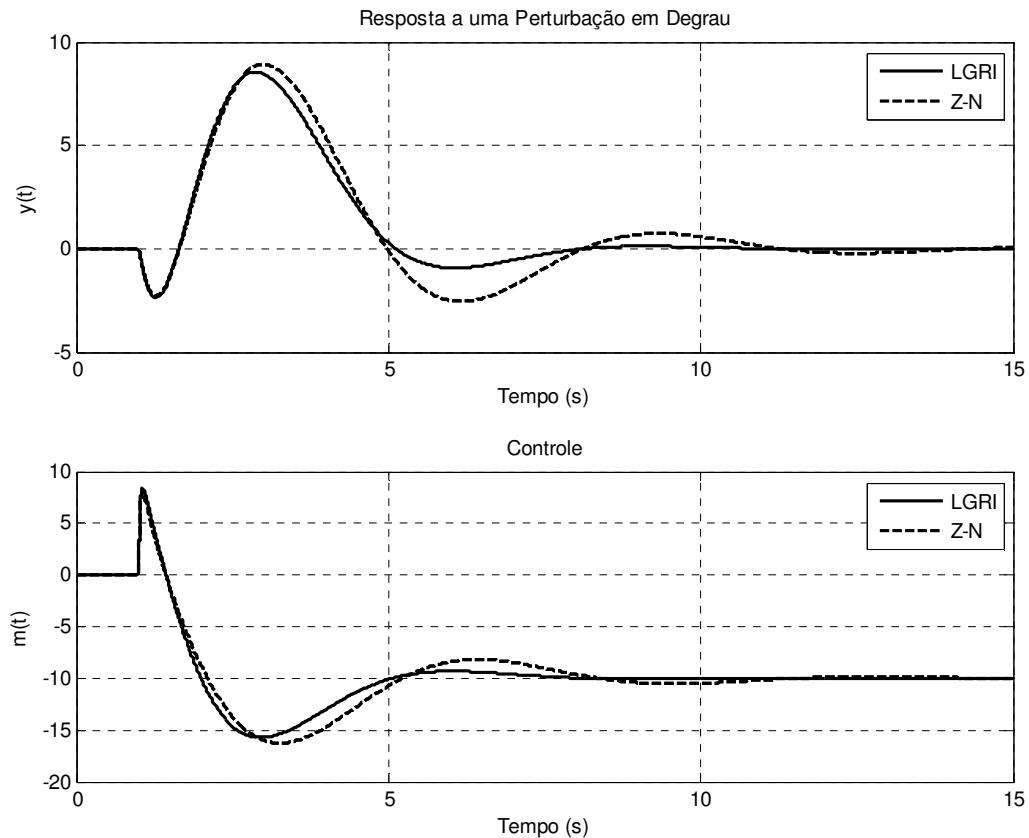


FIGURA 4.10 – RESPOSTA AO DISTÚRBIO.

As tabelas 4.3.a e 4.3.b resumem os comparativos. Para uma variação do sinal de referência, comparou-se o esforço de controle ( $m(t)$  máximo), o tempo de acomodação  $T_s$  da resposta  $y(t)$  e seu sobressinal. Na rejeição de perturbações, comparam-se as amplitudes máximas presentes no sinal de controle e na saída, necessárias para rejeitar o distúrbio.

Os dados numéricos confirmam a conclusão qualitativa prévia de que as respostas são praticamente equivalentes nas suas características quanto à rejeição do distúrbio, mas o LGRI confere um desempenho superior no acompanhamento do sinal de referência, pois praticamente não existe sobressinal e o tempo de acomodação é bem menor.

*Tabela 4.3.a – DADOS COLETADOS - REFERÊNCIA.*

	$m(t)$ máximo	$T_s$	Sobressinal (%)
LGRI	48	6,7 s	2,5
Z-N	48	10,9 s	62,5

*Tabela 4.3.b – DADOS COLETADOS - DISTÚRBIO.*

	$ m(t) $ máximo	$y(t)$ máximo
LGRI	15,7	8,5
Z-N	16,2	8,9

#### 4.1.4. Sistema Térmico com Tempo Morto

Outro modelo comum associado a plantas reais é função de transferência de primeira ordem com tempo morto. Como ilustração, considere então o sistema descrito em Ogata (2003). Trata-se de um sistema térmico no qual o ar quente circula para manter constante a temperatura de uma câmara. Sua função de transferência é

$$G(s) = \left( \frac{3}{2s + 1} \right) e^{-0,8s}. \quad (4.16)$$

Como essa planta é estável em malha aberta, outros métodos clássicos de sintonia PID também podem ser utilizados. Por tanto, o desempenho do controlador LGRI é testado em comparação ao desempenho do controlador sintonizado pelo método de Cohen e Coon (1953).

##### 4.1.4.1. Projeto PID pelo Método de Cohen e Coon

Os valores do ganho, da constante de tempo e do tempo morto da planta podem ser facilmente obtidos por meio de um ensaio em malha aberta, aplicando-se um sinal de entrada tipo degrau. Com esses valores, obtém-se os ganhos sugeridos na sintonia Cohen e Coon (tabela 2.3) e o controlador resulta

$$C(s) = 1,2 \left( 1 + \frac{1}{1,7s} + 0,27s \right). \quad (4.17)$$

#### 4.1.4.2. Projeto LRGI

O valor  $K_{pre} = 0,4$  foi escolhido por meio de tentativas de modo a se obter uma resposta do tipo sub-amortecida no ensaio preliminar. A figura 4.11 apresenta o gráfico do sinal de saída  $y(t)$  para um sinal de referência  $v(t)$  do tipo degrau de amplitude unitária. Do gráfico de  $y(t)$ , obtém-se o instante de pico  $T_p = 2,8\text{ s}$  e o sobressinal  $M_p = 7,4\%$ . O ganho de regime permanente  $K_g = 0,54$  é determinado dividindo-se o valor de regime de saída pela amplitude do degrau de referência aplicado. Com base nessas informações, a função de transferência estimada resulta

$$F(s) = \frac{1,17}{s^2 + 1,87s + 2,14} . \quad (4.18)$$

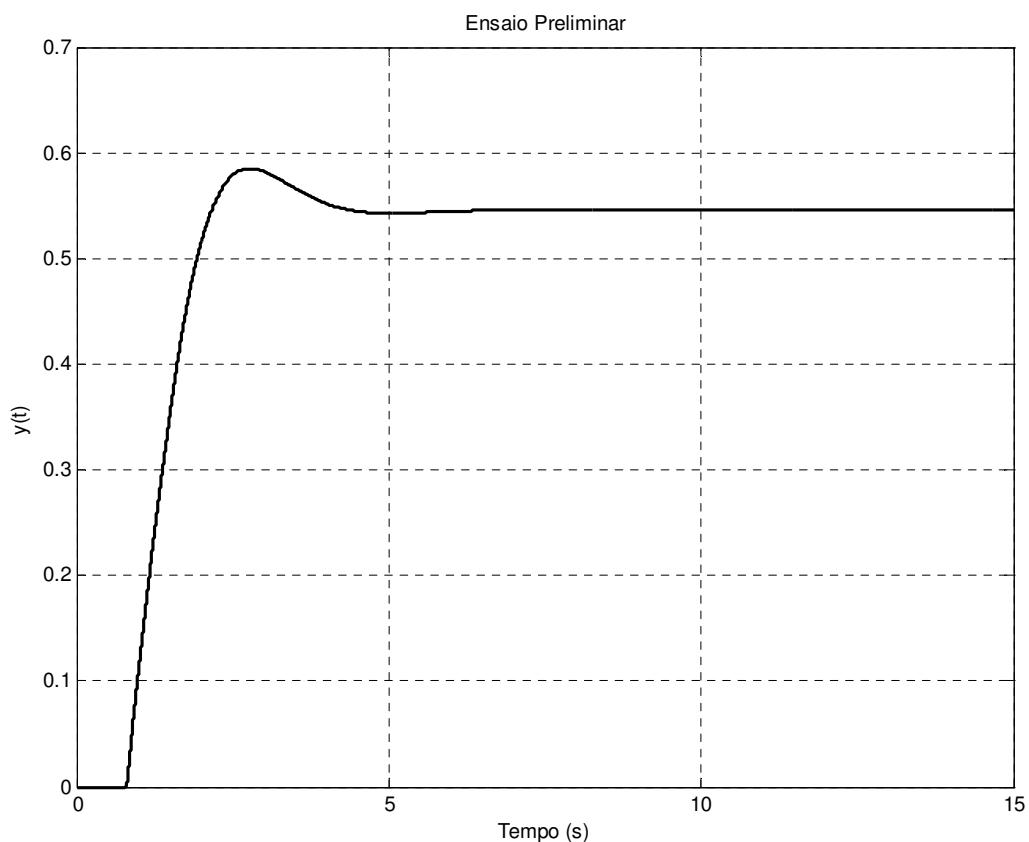


FIGURA 4.11 – ENSAIO PRELIMINAR

O valor  $K_{locus} = 0,8$  foi escolhido por meio de tentativas de modo que o esforço de controle obtido com o controlador LGRI fosse igual ao esforço de controle obtido com o PID

projeto pelo método de Cohen e Coon (1953). Com os valores  $K_{pre}$ ,  $K_{locus}$  e com as informações do ensaio preliminar determinam-se os controladores

$$PID1(s) = \frac{0,32s^2 + 0,6s + 0,69}{s} \quad (4.19)$$

e

$$PID2(s) = \frac{0,32s^2 + s + 0,69}{s} \quad (4.20)$$

#### 4.1.4.3. Comparativo

Os gráficos da figura 4.11 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de referência tipo degrau unitário no instante 5,0 s, utilizando-se o controlador LGRI e o controlador PID sintonizado pelo método de Cohen e Coon (1953).

Como impusemos que os valores máximos do controle fossem iguais, as demais características da resposta podem ser comparadas numa mesma base. No caso deste exemplo, o controlador LGRI confere um desempenho superior à resposta do sistema que pode ser caracterizado pelo menor sobressinal e tempo de acomodação.

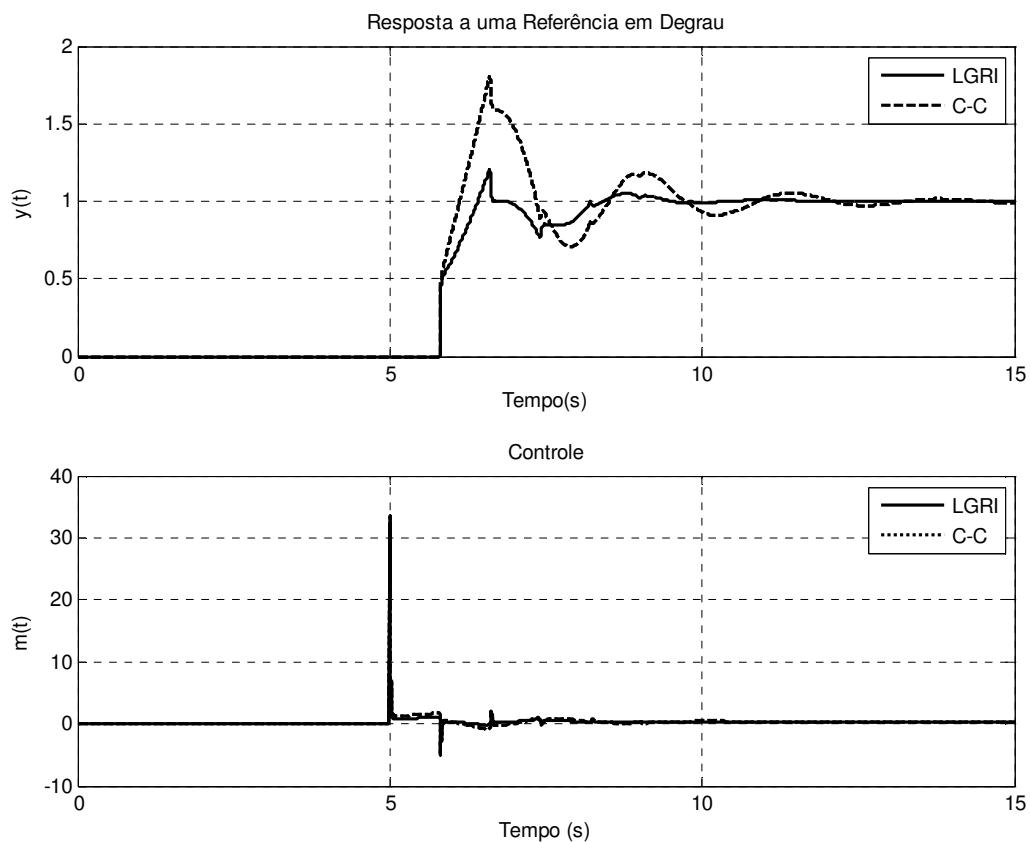


FIGURA 4.12 – RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.

Os gráficos da figura 4.13 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de perturbação tipo degrau de amplitude 10, aplicado no instante 5,0 s.

Dos gráficos pode-se constatar que a máxima excursão da saída e o esforço de controle necessário são, praticamente, os mesmos.

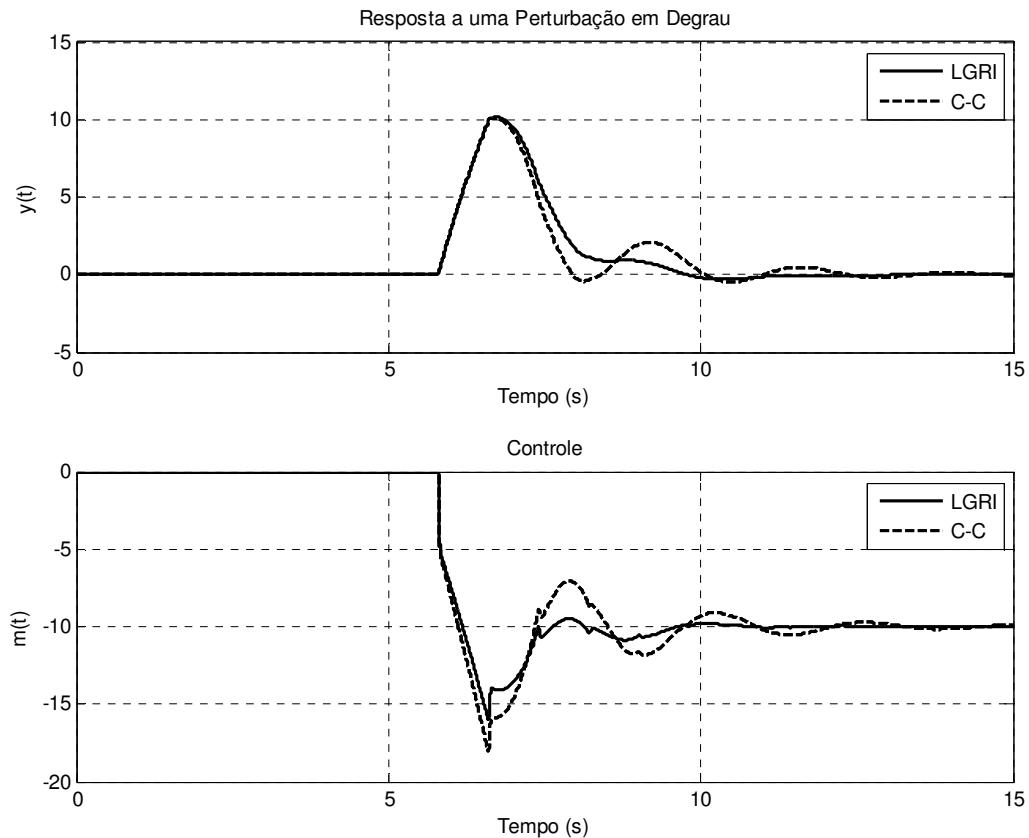


FIGURA 4.13 – RESPOSTA AO DISTÚRBIO.

As tabelas 4.4.a e 4.4.b resumem os comparativos. Para uma variação do sinal de referência, comparou-se o esforço de controle ( $m(t)$  máximo), o tempo de acomodação  $T_s$  da resposta  $y(t)$  e seu sobressinal. Na rejeição de perturbações, comparam-se as amplitudes máximas presentes no sinal de controle e na saída, necessárias para rejeitar o distúrbio.

*Tabela 4.4.a – DADOS COLETADOS - REFERÊNCIA.*

	$m(t)$ máximo	$T_s$	Sobressinal (%)
LGRI	33	4,3 s	20
Z-N	33	7,9 s	80

*Tabela 4.4.b – DADOS COLETADOS - DISTÚRBIO.*

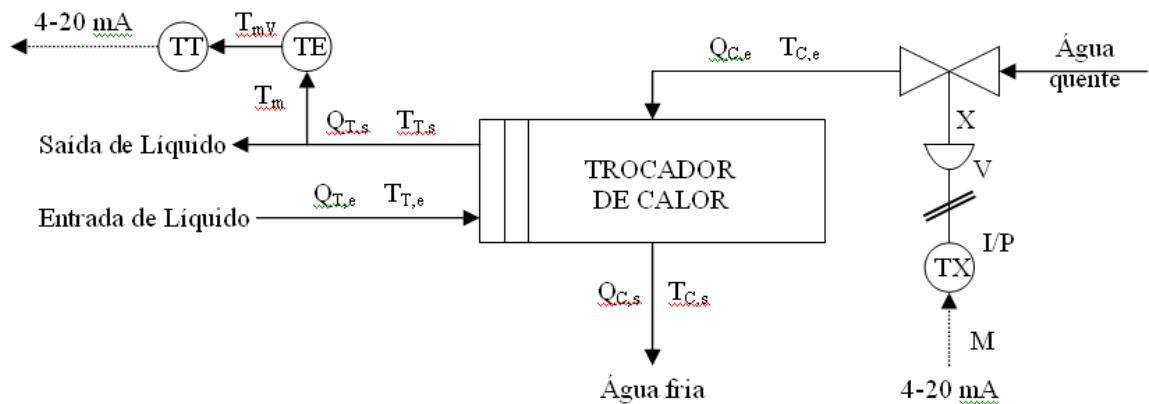
	$ m(t) $ máximo	$y(t)$ máximo
LGRI	16	10,1
Z-N	18	10,1

Os dados numéricos confirmam a análise qualitativa de que o controlador LGRI confere um desempenho superior no acompanhamento do sinal de referência. Já quanto à rejeição da perturbação, as respostas são praticamente equivalentes.

#### 4.1.5. Sistema Trocador de Calor

Os trocadores de calor são equipamentos muito comuns nos processos produtivos. Por este motivo o desempenho do compensador LGRI foi avaliado no controle deste equipamento.

Um trocador de calor do tipo casco-tubo, operando em contra-corrente com água de ambos os lados, suposto adiabático está esquematicamente na figura 4.14.



*FIGURA 4.14 –Trocador de Calor Casco-Tubo (GARCIA, 1997)*

Esta planta pode ser simplificadamente modelada por uma função de transferência de segunda ordem superamortecida, mais um tempo morto (GARCIA, 1997). Para o projeto do controlador, considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{3e^{-0,5 s}}{(2s+1)(3s+1)} . \quad (4.21)$$

Uma vez que o método da síntese direta de controladores PID também se aplica a esse tipo de modelo, o desempenho do controlador LGRI sé comparado com o desempenho de um PID projetado pela técnica da síntese direta.

#### **4.1.5.1. Projeto PID pelo Método da Síntese Direta**

Além dos valores do ganho, tempo morto e constantes de tempo da planta, é necessário fornecer o valor desejado para a constante de tempo  $\tau_c$  de malha fechada. Neste exemplo, seu valor foi escolhido igual a  $2\text{ s}$  e será o mesmo valor imposto para o método LGRI. Obtém-se então os ganhos sugeridos pelo método da síntese direta (tabela 2.7) e o controlador resulta

$$C(s) = 0,67 \left( 1 + \frac{1}{5s} + 1,2s \right) . \quad (4.22)$$

#### **4.1.5.2. Projeto LRGI**

O valor  $K_{pre} = 0,4$  foi escolhido por meio de tentativas de modo a se obter uma resposta do tipo sub-amortecida no ensaio preliminar. A figura 4.15 apresenta o gráfico do sinal de saída  $y(t)$  para um sinal de referência  $v(t)$  do tipo degrau de amplitude unitária. Do gráfico de  $y(t)$ , obtém-se o instante de pico  $T_p = 7\text{ s}$  e o sobressinal  $M_p = 10\%$ . O ganho de regime permanente  $K_g = 0,54$  é determinado dividindo-se o valor de regime de saída pela amplitude do degrau de referência aplicado. Com base nessas informações, a função de transferência estimada resulta

$$F(s) = \frac{0,17}{s^2 + 0,66s + 0,31} . \quad (4.23)$$

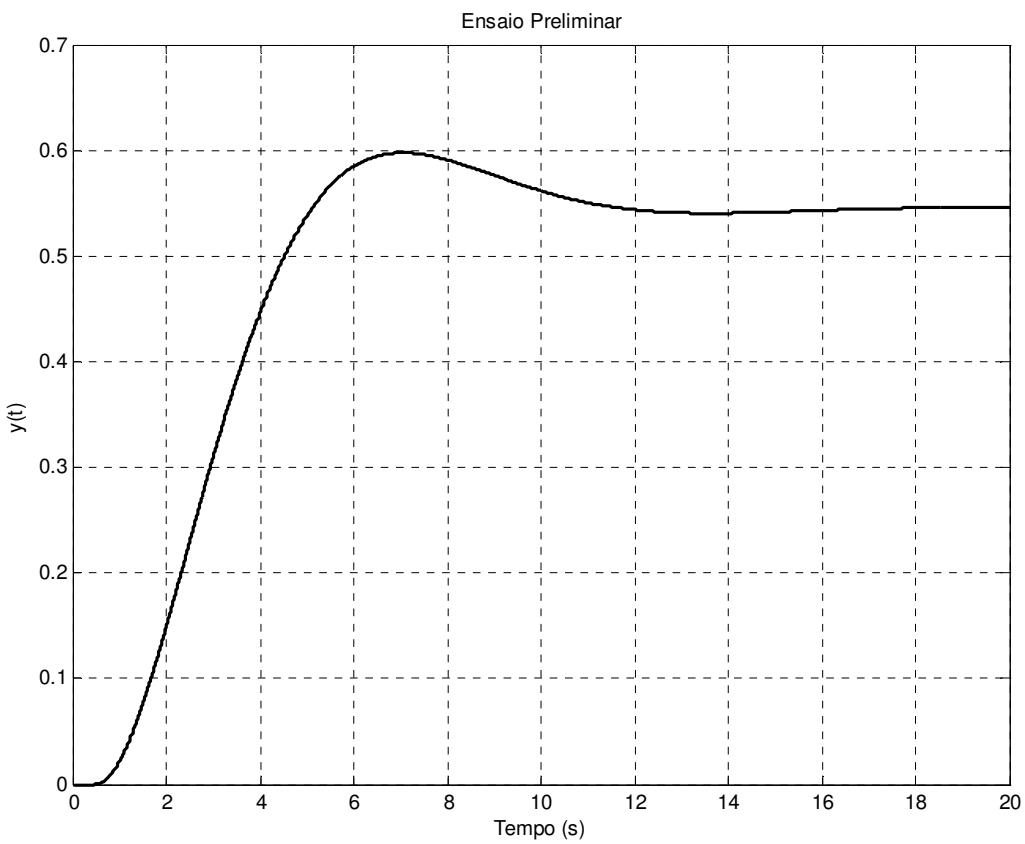


FIGURA 4.15 – ENSAIO PRELIMINAR.

O valor  $K_{locus} = 3$  foi escolhido de forma que a constante de tempo desejada no acompanhamento do sinal de referência seja de 2 s. Com os valores  $K_{pre}$ ,  $K_{locus}$  e com as informações do ensaio preliminar determinam-se os controladores

$$PID1(s) = \frac{1,19s^2 + 0,78s + 0,37}{s} \quad (4.24)$$

e

$$PID2(s) = \frac{1,19s^2 + 1,18s + 0,37}{s} \quad (4.25)$$

#### 4.1.5.3. Comparativo

Os gráficos da figura 4.16 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de referência tipo degrau unitário no instante 2,0 s, utilizando-se o controlador LGRI e o controlador PID sintonizado pelo método as síntese direta.

Note que ambas as respostas apresentam um comportamento dinâmico que se assemelha à resposta de um sistema de primeira ordem com constante de tempo próxima a 2 s, como esperado pelas duas técnicas de projeto.

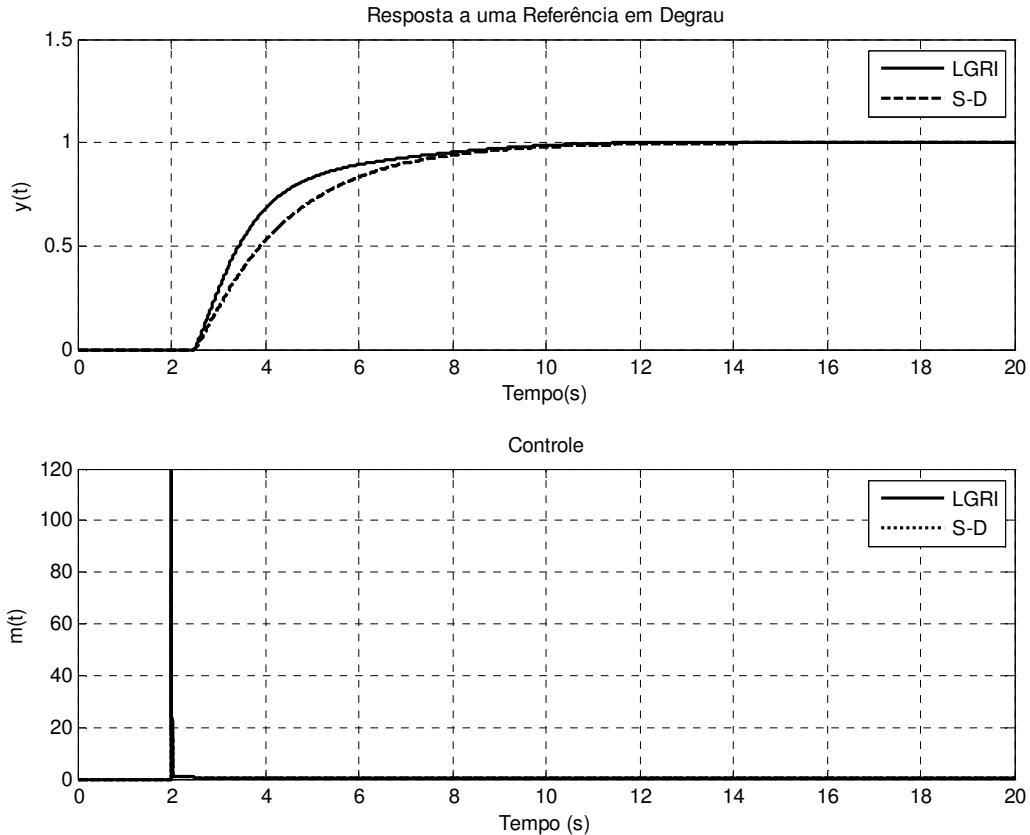


FIGURA 4.16 – RESPOSTA A VARIAÇÃO DE REFERENCIA.

Os gráficos da figura 4.17 mostram o sinal de saída da planta  $y(t)$  e do controle  $m(t)$ , para um sinal de perturbação tipo degrau de amplitude 10, aplicado no instante 2,0 s.

Dos gráficos pode-se perceber que a máxima excursão da saída é menor quando a rejeição da perturbação é feita pelo controlador LGRI. Entretanto, o esforço de controle necessário para isso é maior do que aquele necessário com o controlador PID projetado pela técnica da síntese direta.

As tabelas 4.5.a e 4.5.b resumem os comparativos. Para uma variação do sinal de referência, comparou-se o esforço de controle ( $m(t)$  máximo) e o tempo de acomodação  $T_s$  da resposta  $y(t)$ . Na rejeição de perturbações, comparam-se as amplitudes máximas presentes no sinal de controle e na saída, necessárias para rejeitar o distúrbio.

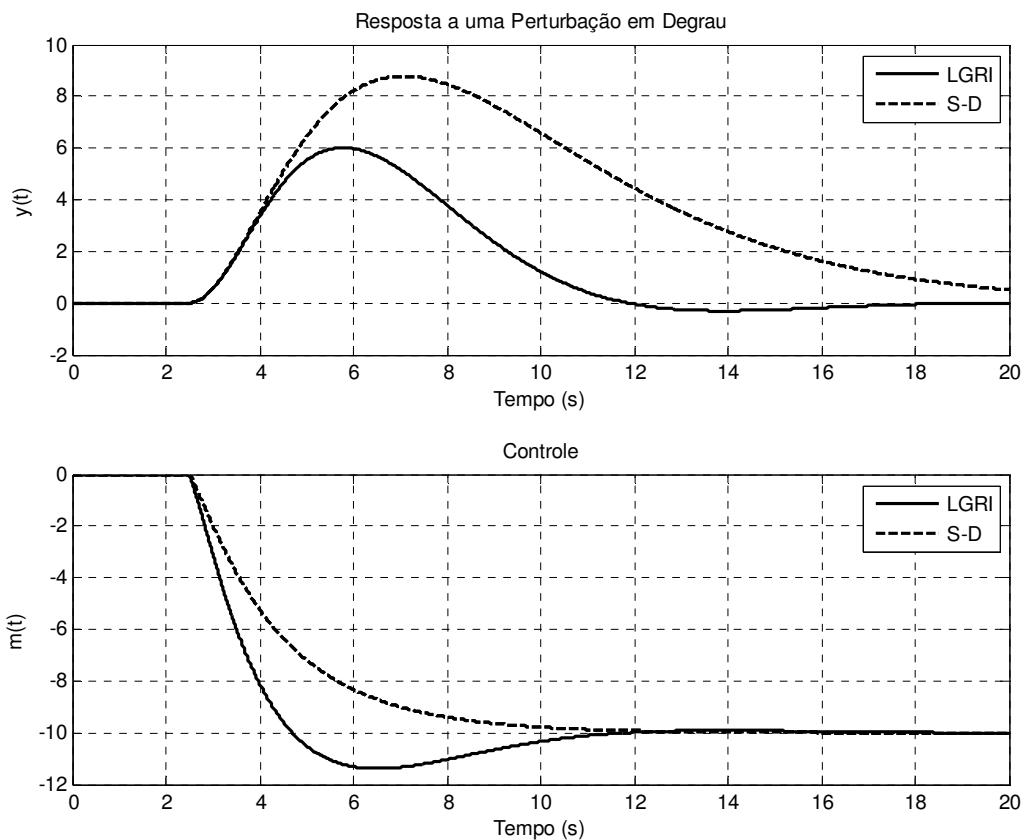


FIGURA 4.17 – RESPOSTA AO DISTÚRBIO.

*Tabela 4.5.a – DADOS COLETADOS - REFERÊNCIA*

	$m(t)$ máximo	$T_s$
LGRI	120	7,5 s
S-D	80	8,2 s

*Tabela 4.5.b – DADOS COLETADOS - DISTÚRBIO*

	$ m(t) $ máximo	$y(t)$ máximo
LGRI	11,4	6
S-D	10	8,8

Os dados numéricos confirmam a análise qualitativa de que o controlador LGRI e o da síntese direta têm um desempenho praticamente equivalente quanto ao acompanhamento do sinal de referência. Já quanto à rejeição da perturbação, o controlador LGRI confere uma rejeição mais efetiva no sentido que o máximo desvio na saída é inferior quando comparado

com o máximo desvio obtido com o da síntese direta. Entretanto, isso é conseguido à custa de um esforço maior de controle.

## 4.2. Desempenho Prático

Como aplicação prática considere o projeto do controlador LGRI para um sistema servoposicionador (GOMES, LEONARDI e CRUZ, 2006).

O valor  $K_{pre} = 2$  foi escolhido por meio de tentativas de modo a se obter uma resposta do tipo sub-amortecida no ensaio preliminar. A figura 4.18 apresenta o gráfico do sinal de saída  $y(t)$  para um sinal de referência  $v(t)$  do tipo degrau de amplitude unitária. Do gráfico de  $y(t)$ , obtém-se o instante de pico  $T_p = 0,29\text{ s}$  e o sobressinal  $M_p = 48\%$ . O ganho de regime permanente  $K_g = 0,8$  é determinado dividindo-se o valor de regime de saída pela amplitude do degrau de referência aplicado. Com base nessas informações, a função de transferência estimada resulta

$$F(s) = \frac{99}{s^2 + 5,06s + 123,76} . \quad (4.26)$$

O valor  $K_{locus} = 0,01$  foi escolhido de forma que a constante de tempo desejada no acompanhamento do sinal de referência, seja de  $1\text{ s}$ . Com os valores  $K_{pre}$ ,  $K_{locus}$  e com as informações do ensaio preliminar determinam-se os controladores

$$PID1(s) = \frac{0,02s^2 + 0,1s + 2,47}{s} \quad (4.27)$$

e

$$PID2(s) = \frac{0,02s^2 + 2,1s + 2,47}{s} \quad (4.28)$$

Para comprovar o desempenho do sistema de controle, aplicou-se um degrau unitário na entrada de referência no instante  $10\text{ s}$ . Aos  $20\text{ s}$ , uma nova entrada de referência, na forma de um degrau negativo de amplitude unitária, foi aplicada, só que, desta vez, o sinal de referência foi aplicado sem o pré-filtro. Isto permite avaliar a dinâmica da malha isolada, que

é equivalente à dinâmica de rejeição de perturbações adicionadas à saída da planta. O resultado experimental está mostrado na figura 4.19.

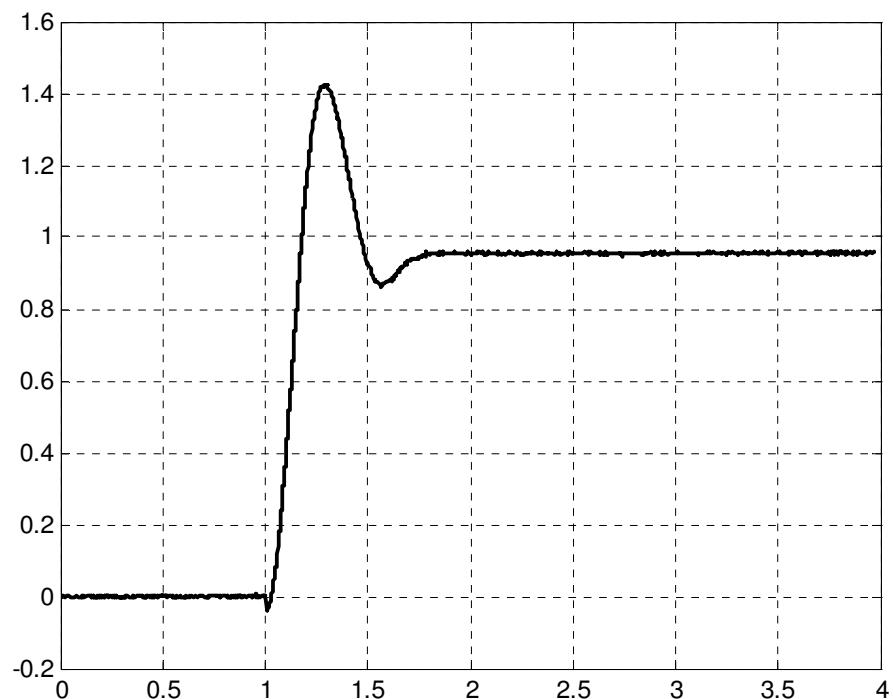


FIGURA 4.18 – ENSAIO PRELIMINAR SISTEMA SERVO.

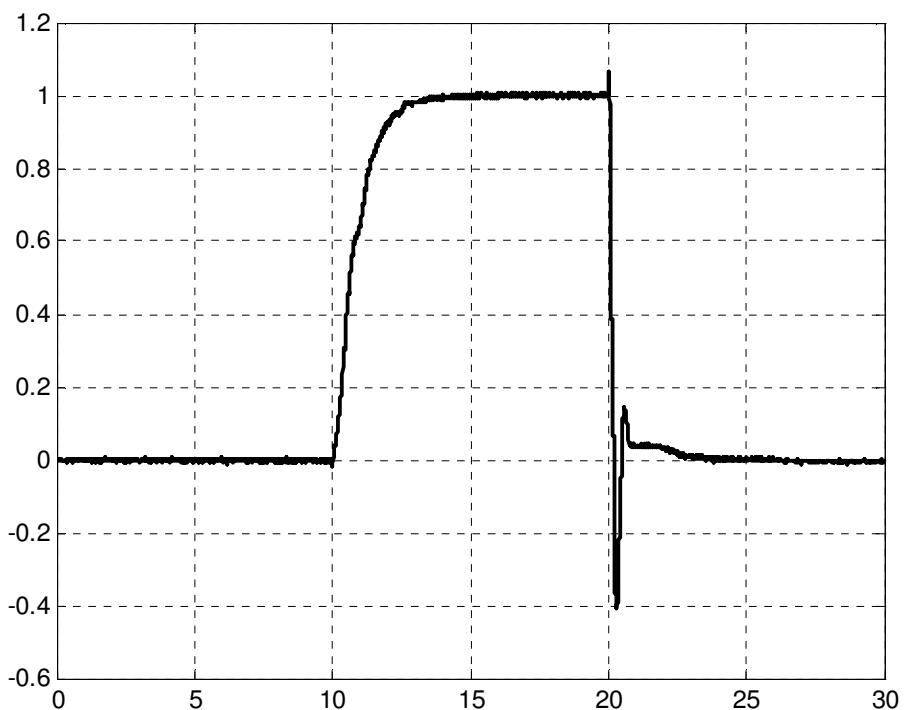


FIGURA 4.19 DESEMPENHO EXPERIMENTAL SISTEMA SERVO.

Note que o sistema exibe uma resposta aproximada a de um sistema de primeira ordem com constante de tempo aproximada de 1 s quando a excitação de entrada passa pelo pré-filtro e com uma dinâmica mais complexa, quando a excitação entra diretamente na malha.

### 4.3. Fórmulas Simplificadas de Sintonia

Para que o método seja facilmente aplicável em situações práticas, é conveniente que as informações colhidas do ensaio preliminar e as fórmulas dos ganhos dos controladores PID, sejam simples.

Neste sentido, propõe-se usar medidas, mesmo que aproximadas e muitas vezes imprecisas, do pseudo-período  $T$  (aproximadamente o dobro do intervalo de tempo entre os pontos A e B do gráfico obtido no ensaio preliminar) e do tempo de acomodação  $T_s$  (instante de tempo do ponto C, que corresponde a 98% do valor final da resposta do ensaio preliminar). Vide ilustração na figura 4.20.

Com estas informações é possível escrever os ganhos dos PIDs de forma bastante simples.

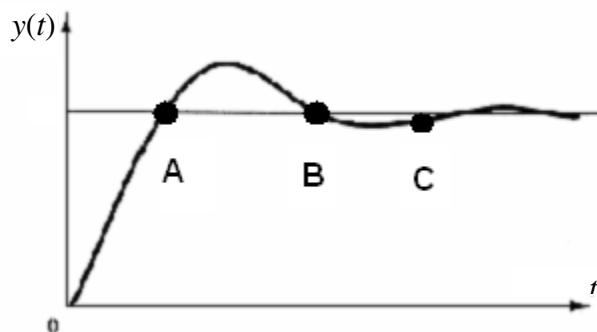


FIGURA 4.20 RESPOSTA DE UM SISTEMA SUBAMORTECIDO.

O parâmetro livre de projeto é a constante de tempo desejada de malha fechada  $\tau_c$ . Os demais dados de projeto são  $K_{pre}$  e  $K_g$ . A tabela a seguir resume o projeto quando é possível obter um sistema subamortecido, a partir do ensaio preliminar com dinâmica próxima a de um sistema de segunda ordem.

*Tabela 4.6 – FÓRMULAS SIMPLIFICADAS DE SINTONA .*

$Ki$	$\frac{Kpre}{\tau_c \ Kg}$
$Kd$	$\frac{Ki}{\left(\frac{4}{T_s}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$
$Kp1$	$\frac{8 Kd}{Ts}$
$Kp2$	$Kp1 + Kpre$

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho discutiu a propriedade incremental do Método do Lugar Geométrico das Raízes e uma aplicação na sintonia de controladores PID. A técnica de sintonia de controladores PID proposta é realizada em duas etapas. Inicialmente faz-se um ensaio em malha fechada com um controlador proporcional. Em seguida, o projeto do compensador é realizado por cancelamento de pólos. Mostrou-se que a lei de controle obtida é uma estrutura PID de dois graus de liberdade e que o controlador associado ao acompanhamento do sinal de referência leva a desempenhos próximos a sistemas de primeira ordem enquanto que o controlador associado à rejeição de distúrbio tem uma característica que depende também da dinâmica da malha do ensaio preliminar e, portanto, de certa forma, independente.

Como exemplos numéricos do procedimento, diversas plantas foram consideradas e seu desempenho comparado com outras técnicas clássicas de sintonia. Percebeu-se que o controlador obtido pelo método proposto tem desempenho comparável aos demais métodos e, às vezes, até superior. Como aplicação real considerou-se um caso de controle de posição de um servo mecanismo.

Para tornar o método uma ferramenta cômoda, propôs-se também regras práticas de sintonia dos controladores de dois graus de liberdade. Para se obter fórmulas elementares, as informações extraídas do ensaio experimental preliminar são meramente o valor aproximado do pseudo-período e o tempo de acomodação, segundo o critério de 98% do valor final.

Como proposta de continuidade deste trabalho sugere-se a aplicação do método em casos reais da indústria.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- ALTMANN, W. Practical Process Control for Engineers and Technicians. Perth - Austrália, Ed. Elsevier, 2005.
- ASTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Automatic Tuning of PID Controllers. ISA Instrument Society of America, 1988.
- ATHANS, M. On The Design of P-I-D Controllers Using Optimal Linear Regulatory Theory, Automática, Vol.7, pp. 643-647, 1971.
- COHEN, G. H.; COON, G. A. Theoretical Considerations of Retarded Control. Transactions of the ASME, v.75, p.827-34, Jul. 1953.
- CAMPOS, M. C. M. M de.; TEIXEIRA, H. C. G.; Controle Típicos de equipamentos e processos industriais, São Paulo, Ed. Blucher, 2006.
- EVANS, W.R. Analysis of Control System, AIEE Transactions, vol. 67, pp. 547-551, 1948.
- EVANS, W. R. Control System Synthesis and Root Locus Method, AIEE Transactions, vol. 69, pp. 66-69, 1950.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. Sistemas de Controle Modernos, 8a Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2001.
- GARCIA, C.; Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo – EDUSP, 1997.
- GARCIA, C.; Apostila do controle de processos industriais. Projeto e sintonia de controladores PID analógicos. 2003
- GOMES, S.C.P.; LEONARDI, F.; DA CRUZ J. J. Incremental Root Locus and PID Tuning. XXII CIIQ - V CAIQ – Buenos Aires – AR. 2006
- HEMERLY, H. M. Sintonização Ótima de Controladores PID Digitais, Controle & Automação, Vol.3, No 1, pp. 291-298, Março/Abril, 1991.

LEONARDI, F.; DA CRUZ, J. J. Controladores Multivariáveis Robustos com Estrutura P.I.D. II Congresso Internacional da ISA, Salvador, pp.53-62, 1993.

LOPEZ, A. M.; MILLER, J. A., SMITH, C. L. Tuning controllers with error-integral criteria Instrumentation Technology, v.14, n.11, p. 57-62, (1967 apud GARCIA 2003).

MONTEIRO, L.H.A. ; DA CRUZ, J. J. Simple answers to usual questions about unusual forms of the Evans' root locus plot. Sba Controle & Automação vol.19 .no.4. Natal. Dec. 2008

MAYA, F.; LEONARDI, P. A. Sintonia Robusta de Controladores de Malha. 10º Congresso Brasileiro de Engenharia Química, São Paulo, 1994.

MUKHOPADHYAYA, S. PID Equivalent of Optimal Regulator, Electronics Letters, Vol.14, No 25, pp. 821-822, Dec 1978.

NISE, N. S. Engenharia de Sistemas de Controle, 3a Edição, Rio de Janeiro, LTC, 2002.

OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, 2ª Edição, Rio de Janeiro, Prentice Hall, 1997.

OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, 4ª Edição, São Paulo, Prentice Hall, 2003.

STEPHANOPOULOS, G., Chemical Process Control, An introduction the theory and pratice. São Paulo, Prentice Hall, 1984.

SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., MELLICHAMP, D. A. Process Dynamics and Control. John Wiley & Sons. 1989.

TAVAKOLI, S. e TAVAKOLI, M., Optimal tuning of PID Controllers for first order plus time delay model using dimensional analysis. The Fourth Int. Conf. on Control and Automation, ICCA-03, 10-12 june, Montreal. 2003

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum setting for Automatic Controllers, Transactions of the ASME, v.64, n.11, p.759-65, Nov. 1942 .