

ESTUDO DE ESTRATÉGIAS DE CONTROLE DE UM VEÍCULO QUADRIRROTOR

Raphael Ballet ¹; Rodrigo Alvite Romano ²

¹ Aluno de Iniciação Científica da Escola de Engenharia Mauá (EEM-CEUN-IMT);

² Professor(a) da Escola de Engenharia Mauá (EEM-CEUN-IMT).

Resumo. *Este projeto de iniciação científica tem o objetivo de realizar um estudo envolvendo uma estratégia de sintonia de controladores baseada em técnicas de otimização para melhoria no controle de estabilidade de um veículo quadrirrotor. A pesquisa contempla a criação de um modelo matemático não linear do veículo, assim como o desenvolvimento de um simulador computacional para avaliar o seu comportamento dinâmico e sintonizar o seu controlador. Ao final do projeto, o sistema será validado em uma plataforma com restrição de graus de liberdade com um protótipo de veículo quadrirrotor.*

Introdução

Os veículos aéreos não tripulados (VANT) vem se tornando importantes objetos de estudo atualmente. Esse crescimento ocorre principalmente pelo grande salto tecnológico e miniaturização de equipamentos eletrônicos de alta capacidade de computação, além de motores de maior eficiência e capacidade de carga e estruturas mecânicas mais leves. Por meio do crescimento do poder computacional disponível para os veículos, principalmente veículos aéreos, o desafio da criação de veículos não tripulados se tornou um grande atrativo para pesquisadores de diversos centros de pesquisa e universidades, assim como diversos setores do mercado civil e militar. Atividades antes perigosas para seres humanos ou inviáveis para veículos de grande porte, agora podem ser realizadas por pequenas aeronaves dotadas de diversos equipamentos para realizar praticamente qualquer atividade desejada. Por esse motivo, o crescimento desse segmento de pesquisa vem para suprir lacunas do mercado atual e criar novos produtos, assim como ser utilizado como uma ferramenta multidisciplinar de ensino de engenharia.

Os VANT's podem ser divididos em diversas categorias, como helicópteros, multirrotores, aviões de asas fixas, dirigíveis e robôs baseados em biomimética (Bouabdallah, 2007). Dentre essas categorias, a que mais tem ganhado espaço no meio acadêmico é a categoria de multirrotores, principalmente os quadrirrotores. Esses veículos podem ser encontrados em diversas configurações, mas basicamente consistem em um veículo com quatro braços idênticos e perpendiculares entre si, nos quais se encontram um motor com uma hélice de passo fixo na extremidade. Esses veículos apresentam menor complexidade de estrutura e maior facilidade de controle. Além disso, os veículos quadrirrotores obtêm vantagem em relação a helicópteros principalmente pela sua estabilidade e agilidade de movimentação (Carrillo *et al.*, 2013).

Os veículos quadrirrotores, por serem veículos aéreos, apresentam complexo comportamento dinâmico e, por isso, o seu controle de estabilidade apresenta elevado grau de dificuldade. O estudo desse tipo de aeronave é recente e poucos estudos foram feitos para a validação da melhor abordagem de controle de estabilidade possível. Outro fator importante a se observar é o fato do veículo ser multivariável, onde há quatro atuadores (propulsores) para controlar a dinâmica do veículo. Se for desejado o controle apenas da estabilização do veículo, o sistema apresenta quatro variáveis manipuladas e três variáveis de controle, mas se há a necessidade de controlar as posições lineares do veículo, o veículo se transforma em um sistema sub-atuado, com seis variáveis manipuladas e apenas quatro atuadores, tornando o

sistema ainda mais complexo (Hoffmann *et al.*, 2007). O objetivo principal deste projeto é o controle de estabilidade do veículo e, portanto, deseja-se controlar apenas os seus ângulos de atitude.

Para a melhor avaliação das técnicas de controladores foi desenvolvido um modelo matemático não linear e um simulador computacional que possa simular sua dinâmica. Este tipo de simulação possibilita a análise do desempenho de controladores sem a necessidade da construção de um protótipo físico. Com isso reduz-se o tempo de implantação e, consequentemente, os custos de desenvolvimento de um sistema de controle.

Após a etapa de simulação, foi criada uma plataforma física de testes com restrição de graus de liberdade, na qual é possível a validação do modelo matemático do veículo e dos controladores desenvolvidos. Por meio dessa plataforma é possível realizar ensaios para testes de estabilidade sem a necessidade de testes reais em voo, diminuindo assim riscos ao operador do veículo e as chances de danificar o veículo. A aeronave é fixada nessa base e é capaz de testar isoladamente os ângulos de rolagem e arfagem, que são os ângulos essenciais para a correta estabilização do veículo.

Todas as etapas são essenciais para a sintonia e avaliação de diferentes controladores. Em diversos trabalhos há o estudo de diferentes técnicas de controladores lineares e não lineares, observando que todos possuem diferentes limitações. Nesse trabalho procurou-se demonstrar a potencialidade do estudo de uma abordagem de sintonia de controladores baseado em técnicas de otimização direta para controle de estabilidade em veículos quadrrrotores. Por meio dessa abordagem é possível otimizar as técnicas de controladores já disponíveis e criar maior estabilidade para a aeronave.

Material e Métodos

Modelo matemático do quadrrrotor

O veículo quadrrrotor possui uma natureza complexa e não linear, que dificulta grande parte da análise do seu comportamento dinâmico. Por essa razão admitem-se algumas hipóteses simplificadoras. São elas:

- a estrutura do quadrrrotor é considerada rígida;
- todos os motores apresentam dinâmicas idênticas;
- o veículo possui simetria em relação aos eixos;
- as forças externas são consideradas perturbações não modeladas;
- o sistema de coordenadas fixo no corpo coincide com o centro de massa do veículo.

A dinâmica do veículo é representada através de dois sistemas de coordenadas (Figura 1). O primeiro sistema é definido como sistema fixo no corpo e é representado pelos vetores ortonormais $\{X_B, Y_B, Z_B\}$ e o segundo é definido como sistema referencial inercial terrestre e é representado por $\{X, Y, Z\}$.

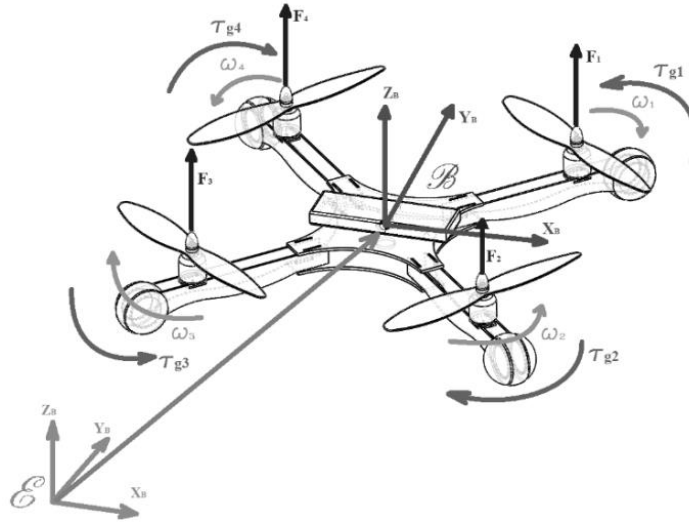


Figura 1 – Ilustração do sistema de coordenadas e das forças que atuam no veículo quadricóptero.

O vetor $\xi = [x, y, z]^t$ representa a posição do centro de massa do veículo em relação ao sistema referencial terrestre e sua derivada é denotada por $\dot{\xi}$. O vetor $\eta = [\phi, \theta, \psi]^t$ representa o deslocamento angular, ou atitude, do veículo em relação ao sistema de coordenadas terrestre, através dos ângulos de Euler: rolagem (ϕ), arfagem (θ) e guinada (ψ). Analogamente, a velocidade angular é indicada por $\dot{\eta}$. As velocidades lineares e angulares da aeronave em relação ao sistema fixo no corpo são representadas por meio dos vetores $v_b = [v_x, v_y, v_z]^t$ e $\omega_b = [p, q, r]^t$, respectivamente.

Para a representação do veículo no sistema inercial terrestre é necessário uma matriz de rotação R (Goldstein, 2001). A matriz R é definida como

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde $S_x = \sin(x)$ e $C_x = \cos(x)$.

Como demonstrado em Ballet, Parro e Romano (2014), a representação das velocidades angulares do sistema referenciado no corpo no sistema inercial terrestre, podemos definir uma matriz W_n como indicado a seguir:

$$\dot{\eta} = W_n^{-1} * \omega_b = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi)/\cos(\theta) & \cos(\phi)/\cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2)$$

Note que tal representação apresenta singularidades quando o ângulo de arfagem é múltiplo de $\frac{\pi}{2}$. Embora outras representações (como a por *quaternions*) possam ser empregadas de modo a evitar tal limitação, por simplicidade a representação por ângulos de Euler é mantida. Além disso, em simulações de manobras usuais espera-se que o veículo não apresente ângulos de atitude que se aproximariam do ponto de singularidade.

Como ilustrado na Figura 1, a propulsão é realizada por quatro motores. Assim, o empuxo gerado pelo i -ésimo motor pode ser modelado por meio da sua velocidade de rotação ω_i , conforme (Bresciani, 2008)

$$F_i = k * \omega_i^2, \quad (3)$$

para cada um dos quatro motores. Cada motor ainda gera um torque giroscópico $\tau_{gi} = c * F_i$ no sentido contrário ao de rotação do motor. As constantes de proporcionalidade k e c dependem da geometria das hélices acopladas aos motores.

A força total de empuxo é dada por:

$$u = \sum_{i=1}^4 F_i. \quad (4)$$

Como os eixos X_B e Y_B estão a 45 graus dos braços da aeronave, o torque generalizado $\tau = [\tau_\phi \tau_\theta \tau_\psi]^t$ em relação a cada eixo de rotação é calculado por meio de

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l \\ -c & c & -c & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

sendo l a distância entre o centro do conjunto motor-hélice e o centro de massa do veículo.

Baseado nas equações de Newton-Euler, a dinâmica da aeronave é representada por:

$$I \dot{\omega}_b + \omega_b \times I \omega_b = \tau, \quad (6)$$

onde

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

em que o símbolo “ \times ” representa a operação de produto vetorial e I é a matriz de inércia do veículo. Devido à simetria da aeronave em relação à Y_B resulta que $I_{xx} \cong I_{yy}$.

Substituindo (2) em (6) e aplicando operações algébricas como as indicadas por Ballet, Parro e Romano (2014), as equações não lineares que representam a atitude do veículo podem ser descritas por

$$\ddot{\eta} = W_n^{-1} I^{-1} (-I \dot{W}_n \dot{\eta} - W_n \dot{\eta} \times I W_n \dot{\eta} + \tau) \quad (8)$$

A dinâmica de translação pode ser descrita por

$$m \dot{v}_b + v_b \times m v_b = T \quad (9)$$

em que m denota a massa da aeronave e T a resultante das forças aplicadas.

Em seguida, considera-se apenas a força peso e o empuxo u , dado por (4), pois o termo $v_b \times m v_b$ que denota a força centrífuga referente ao sistema referenciado no corpo é nulo em relação ao sistema inercial terrestre. Desse modo, a equação vetorial de movimento de translação resume-se a

$$m \ddot{\xi} = -m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad (10)$$

sendo g a aceleração da gravidade.

Seja um vetor auxiliar $\tilde{\tau} = \tilde{\eta}$ relacionado ao torque generalizado τ em cada eixo (Carrillo *et al.*, 2013). Então de (9) e (10) obtém-se um conjunto de equações diferenciais não lineares

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} u * (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) \quad (11)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} u * (\cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi) \quad (12)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} u * \cos\theta \cos\phi - g \quad (13)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \quad (15)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi \quad (16)$$

que descrevem o comportamento dinâmico da aeronave.

Plataforma de simulação

A Tabela 1 apresentam os parâmetros usados na plataforma de simulação que correspondem a um protótipo desenvolvido no Instituto Mauá de Tecnologia (IMT). O veículo quadrrorotor utilizado pode ser visto na Figura 2.

Tabela 1 – Parâmetros do modelo do quadrrorotor.

Descrição	Valor
Constante de torque (c)	0,1 m
Constante de força de empuxo (k)	$2,98 * 10^{-6} \text{ N s}^2 / \text{rad}^2$
Dist. do CG ao eixo do motor (l)	0,225 m
Massa da aeronave (m)	1,5 kg
Momento de inércia (I_{yy})	$2,99 * 10^{-2} \text{ kg/m}^2$
Momento de inércia (I_{yy})	$3,01 * 10^{-2} \text{ kg/m}^2$
Momento de inércia (I_{zz})	$5,92 * 10^{-2} \text{ kg/m}^2$



Figura 2 – Protótipo de veículo quadrrorotor do IMT.

A plataforma de simulação desenvolvida é composta de quatro subsistemas. O subsistema “Modelo Quadricoptero” tem como principal função simular a dinâmica da aeronave, a partir das equações (4)-(5) e (11)-(16). O subsistema “Dinâmica dos atuadores” apresenta a dinâmica dos atuadores encontrada através de ensaios estáticos do motor. O subsistema “Sensoriamento” apresenta a dinâmica dos sensores disponíveis no protótipo do veículo quadricóptero indicado na Figura 2. Nesse bloco estão representados os ruídos inerentes dos sensores, atraso de transporte e processamento, e dinâmica do filtro passa-baixas utilizado para filtrar o ruído dos sensores. Todos os dados foram retirados por meio do sensor MPU-9250 da Invensense[®]. O último bloco representa o controlador utilizado para estabilizar a aeronave. As equações diferenciais não lineares são resolvidas numericamente em ambiente Simulink[®] usando o método Runge-Kutta com um passo de integração de 10^{-4} s.

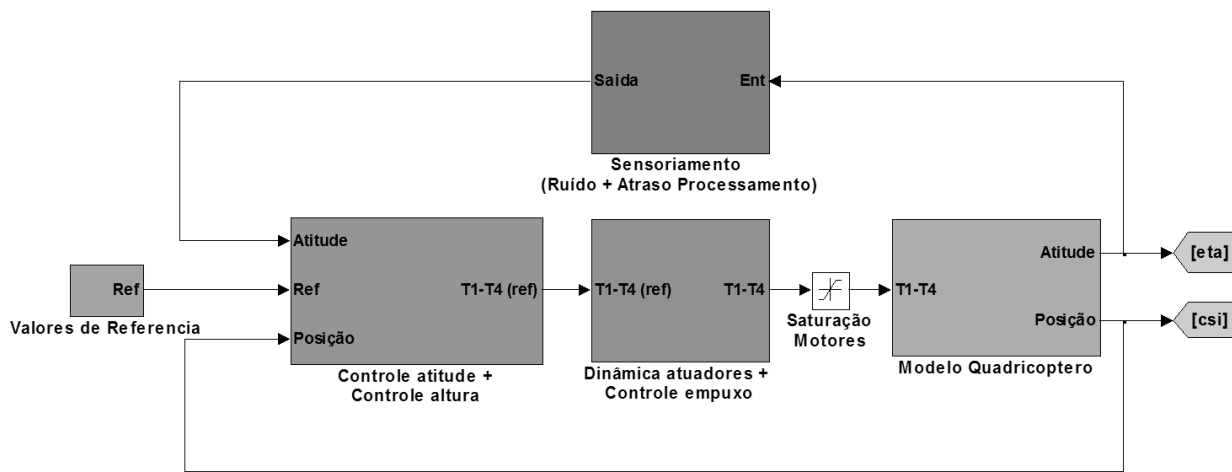


Figura 3 – Diagrama de blocos da plataforma de simulação computacional.

Controlador de atitude

Para estabilizar o deslocamento angular da aeronave (η), utilizou-se as seguintes leis de controle:

$$\tau_{\varphi} = k_{p\varphi}(\varphi_{ref} - \varphi) - k_{d\varphi}\dot{\varphi} + k_{i\varphi} \int (\varphi_{ref} - \varphi) dt \quad (17)$$

$$\tau_{\theta} = k_{p\theta}(\theta_{ref} - \theta) - k_{d\theta}\dot{\theta} + k_{i\theta} \int (\theta_{ref} - \theta) dt , \quad (18)$$

em que φ_{ref} e θ_{ref} representam os valores de referência para os ângulos de rolagem e arfagem, respectivamente. Portanto, são usados quatro controladores PID (Proporcional+Derivativo+Integral), sendo $k_{p(.)}$, $k_{d(.)}$ e $k_{i(.)}$ os ganhos proporcionais, derivativos e integrais das respectivas malhas de controle.

O controlador PID foi escolhido devido sua robustez ao controlar a atitude da aeronave em relação às técnicas de controle multivariável, como o método de alocação de polos e o método LQR. Os resultados de comparação desses métodos podem ser vistos em Bouabdallah (2007) e Drago, Hemerly e Rezende (2012), onde além desses controladores, ainda são testados métodos de controle não linear que garantiam melhores resultados.

Entretanto, devido sua facilidade de implementação em um microcontrolador e a robustez de seu funcionamento, foi escolhido o PID como técnica de controle de estabilidade da aeronave.

Como pode ser visto nas equações (17) e (18), deseja-se apenas controlar os ângulos de rolagem e arfagem, pois são os ângulos necessários para a estabilização do veículo. O ângulo de guinada pode ser mantido fixo ou ser controlado em malha aberta pelo operador (Carrillo *et al.*, 2013).

Os ganhos do controlador de um dos ângulos foram sintonizados a partir do método de otimização direta de Nelder-Mead (Lagarias *et al.*, 1998), um método de otimização não linear livre de derivadas. Por meio desse método é possível achar o mínimo de uma função mérito (J) alterando as variáveis desejadas de uma função não linear. Para os ganhos do controlador, o sistema é tridimensional, ou seja, o sistema deve obter o menor valor da função mérito para três variáveis distintas que formam uma superfície tridimensional. A função mérito pode ser composta de diversas características desejadas para o comportamento da função final. A função é composta de constantes que determinam ganhos que punem atitudes não desejadas ou valorizam atitudes desejadas do sistema. A escolha de uma estrutura da função mérito é parte essencial para a correta otimização dos parâmetros desejados.

A função mérito escolhida para a otimização dos ganhos do controlador pode ser descrita por

$$J = a \sum_K \varepsilon_K^2 + b \sum_K \tau_K^2, \quad (19)$$

onde ε representa o erro entre o ângulo de referência desejado e o ângulo atual do veículo e τ é o esforço de controle do controlador. Os ganhos a e b representam os ganhos que determinam qual a influência que o erro e o esforço de controle representam para a função mérito. Esses ganhos foram escolhidos de forma a igualar a magnitude de efeito do erro encontrado no sistema e do esforço de controle. Os ganhos encontrados foram $a = b = 0,5$.

Plataforma de testes

Durante o projeto foi desenvolvida uma plataforma de testes com restrição de graus de liberdade para poder validar o sistema simulado e o controlador proposto. A plataforma foi desenvolvida para limitar a movimentação do veículo em torno dos eixos X e Y, ou seja, a movimentação da aeronave nos ângulos de rolagem e arfagem, respectivamente. A estrutura foi desenvolvida por meio de um quadro feito com quatro barras de madeira balsa reforçado por duas camadas de fibra de carbono para garantir rigidez e leveza para a estrutura. O quadro é preso em um dos eixos por dois pequenos eixos de alumínio e ligados a um mancal de rolamento e este, por final, é preso a dois apoios que elevam o quadro do solo. Internamente ao quadro, e perpendicular ao eixo, se encontra um tubo de alumínio com dois rolamentos em suas extremidades. No meio do tubo de alumínio há uma base em que é ligado o quadricóptero. Há ainda um contrapeso ligado a base para garantir que o quadricóptero irá rotacionar em seu eixo de gravidade. A estrutura pode ser vista na Figura 4.

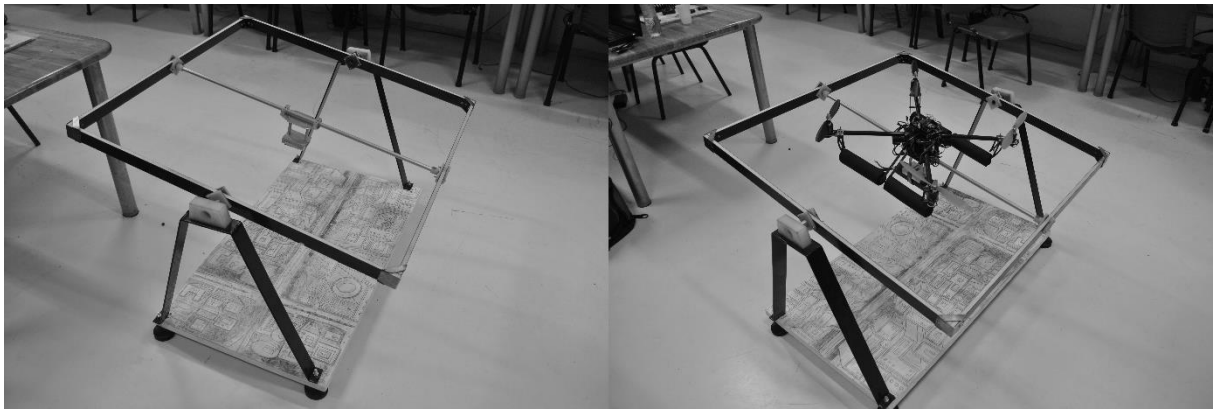


Figura 4 – Plataforma de testes com restrição de graus de liberdade.

A plataforma de testes permite o teste seguro e isolado dos ângulos necessários para a estabilização do veículo. Deste modo podemos avaliar o resultado de diferentes técnicas de controle e validar fisicamente o modelo matemático criado, podendo assim avaliar a estabilidade da aeronave sem ser necessário um teste real de voo. A base de testes foi projetada para causar baixa influência na dinâmica da aeronave e, por esse motivo, foi construída com estruturas leves e utilizados rolamentos de baixa viscosidade.

Resultados e Discussão

Por meio do algoritmo de Lagarias *et al* (1998) para o cálculo do método *Simplex*, foi possível obter os ganhos do controlador do ângulo φ . O algoritmo necessita de valores iniciais de ganho do controlador. Esses ganhos iniciais foram sintonizados empiricamente por meio da observação do comportamento do veículo nas simulações. A Tabela 2 apresenta a diferença entre os ganhos iniciais e os ganhos otimizados através do método de Nelder-Mead. Na Figura 5 está indicado a diferença do comportamento do sistema para os dois controladores propostos a partir de uma entrada a degrau de 15° ao valor de referência do ângulo de rolagem. Ressalta-se que pelo fato de o sistema ser simétrico, os ganhos do controlador obtidos para o ângulo de rolagem podem ser reproduzidos para o ângulo de arfagem.

Tabela 2 – Tabela comparativa dos ganhos do controlador PID

Ganhos PID	Empírico / Inicial	Otimização
$k_{p\varphi}$	2,1	0,7607
$k_{d\varphi}$	0,6	0,2439
$k_{i\varphi}$	0,5	0,3

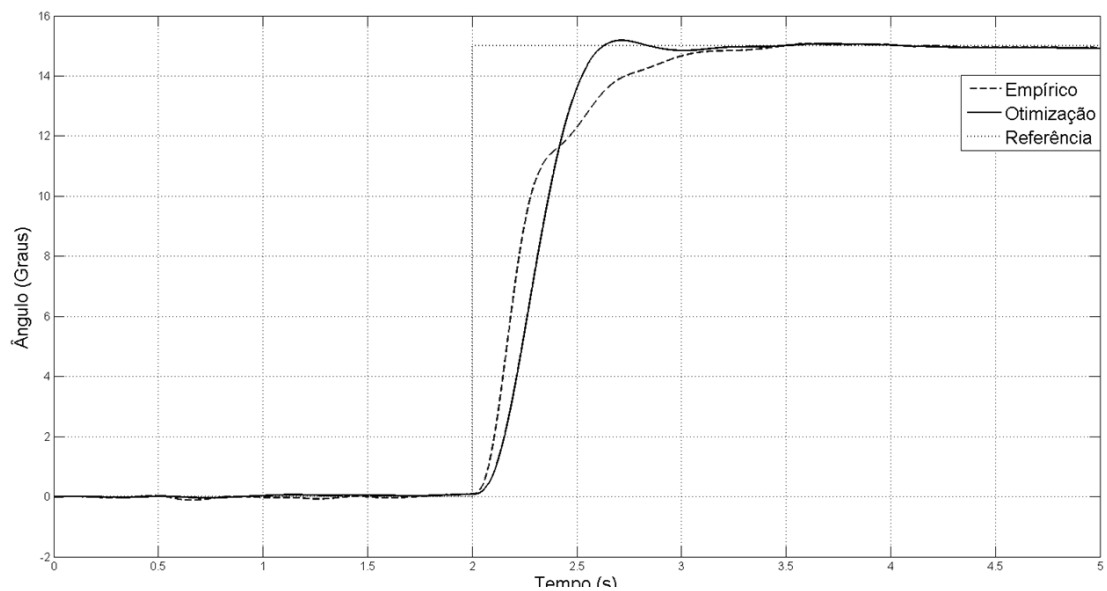


Figura 5 – Gráfico comparativo da resposta do sistema para diferentes ganhos do controlador.

Por meio do gráfico pode-se comparar o resultado simulado dos controladores desenvolvidos. O controlador sintonizado empiricamente apresentou tempo de acomodação maior do que o controlador realizado por meio da otimização *Simplex*, aproximadamente meio segundo mais lento.

O ensaio posterior realizado foi a comparação entre o sistema simulado e o sistema real. Pode-se, por meio deste resultado, comparar a resposta do controlador desenvolvido por meio da técnica de otimização e o sistema real, como visto na Figura 6.

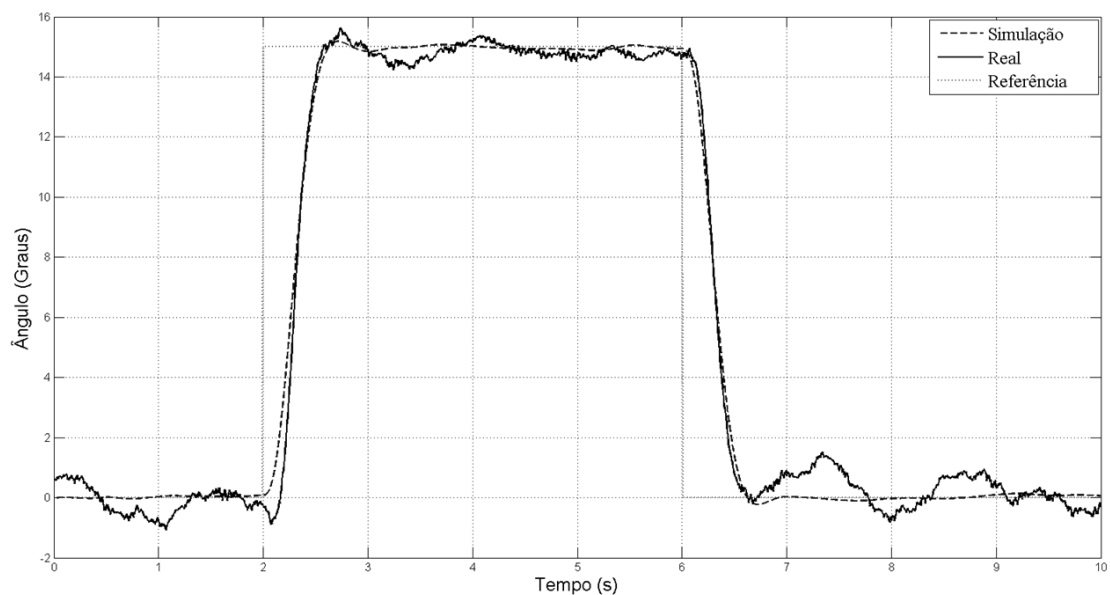


Figura 6 – Gráfico comparativo da resposta do sistema real e o simulado.

O ensaio realizado foi um ensaio seguidor de referência com formato de um pulso de quatro segundos e magnitude de 15° . O início do pulso se inicia em dois segundos e o sistema real e o simulado tem aproximadamente o mesmo tempo de acomodação e comportamento similar de sobressinal. Pode-se notar a maior oscilação do sistema real em relação ao sistema simulado e o resultado é esperado por haver componentes não modelados, como a turbulência causada pela proximidade do solo, distúrbios externos causados pelo vento e flexibilidade da estrutura.

Conclusões

O estudo das equações dinâmicas não lineares e posterior criação de um simulador computacional pode criar melhores métodos para análise e sintonia de controladores. Essa é uma ferramenta importante para testes sem haver a necessidade de testes reais, o que aumenta a segurança e velocidade do desenvolvimento de controladores. Outro fato importante é que o simulador pode ser aprimorado e compor características cada vez mais próximas a realidade, aumentando a confiabilidade do sistema e avaliando a reação de diferentes técnicas de controle para os distúrbios.

A plataforma de testes criada é um complemento do sistema simulado criado. A partir dele é possível avaliar se as hipóteses criadas em modelo simulado se refletem na realidade, além de haver a possibilidade de, em trabalhos futuros, ser utilizado para identificação de sistemas, podendo criar modelos mais completos do veículo. Por meio dessa base é possível testes mais próximos da realidade e avaliar o desempenho de equipamentos embarcados e algoritmos computacionais.

O estudo de sintonias de controle baseados em teorias de otimização é pouco abordado para veículos quadrrrotores e pode ser uma importante ferramenta para o controle de estabilização desse tipo de aeronave. Outras técnicas globais de otimização ainda podem ser testadas para avaliar consistência de resultados. A teoria apresenta grande potencial para desenvolvimento de novos controladores e novas funções de mérito podem melhor caracterizar o desempenho do sistema desejado, criando resultados mais precisos de otimização.

Referências Bibliográficas

- Ballet, R.; Parro, V. C.; Romano, R. A. (2014) Uma Plataforma Didática Para Simulação e Controle Embarcado de Veículos Quadrrrotores. *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte, Minas Gerais.
- Bresciani, T. (2008) Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. Tese (Mestrado) – Lund University, Lund, Suécia.
- Bouabdallah, S. (2007) Design and Control of Quadrotor with Application to Autonomous Flying. Tese (Doutorado) – École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suíça.
- Carrillo, L. R. G.; López, A. E. D.; Lozano, R.; Pégard, C. (2013) *Quad Rotorcraft Control*. London. Springer-Verlag.
- Drago, I.; Hemerly, E. M.; Rezende, F. B. (2012) Implementação e Controle de um Quadrrroto. *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, Paraíba.
- Goldstein, H. (2001) *Classical Mechanics*. Pearson Education.
- Hoffmann, G.; Huang, H.; Tomlin, C. J.; Waslander, S. L. (2007) Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment. *Proceedings of the American Institute of Aeronautics and Astronautics guidance, navigation and control conference*.
- Lagarias, J. C.; Reeds, J. A.; Wright, M. H.; Wright, P. E. (1998) Convergence properties of the Nelder-Mead Simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, V. 9, p. 112-147.